UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA AMBIENTAL
DEPARTAMENTOS ESTUDIOS GENERALES

Curso : MATEMÁTICA I
Código del curso : AA-211
Sección : E-F-G
Docentes : Lic. Adriana Valverde Calderón
Lic. Héctor Alexis Herrera Vega
Ing. Javier Gonz
Ciclo : I
Fecha : 09 de Mayo del 2016
Periodo Académico: 2017-1

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

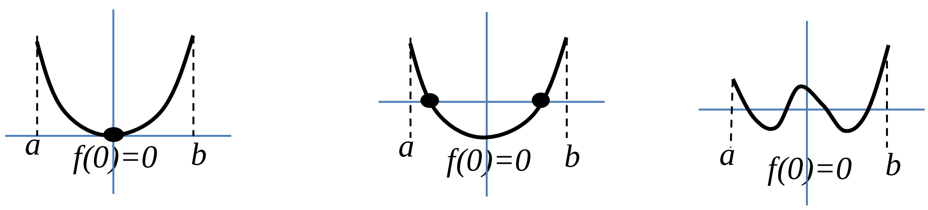
---

1. Demuestre que el enunciado: "*Si* f *es continua y tiene un cero en* $[a\,,b]$, *entonces* $f(a)$ *y* $f(b)$ *poseen signos opuestos*" es falso dibujando una gráfica que proporcione un contraejemplo.
2 pts.

Demostración:

Teorema correcto: "Si f es continua sobre $[a\,,b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ poseen signos opuestos, entonces existe al menos $x_0 \in \langle a\,,b\rangle$ para el cual $f(x_0) = 0$. El teorema recíproco no es cierto.

Contraejemplos



2. Hallar: 3 pts.

$$\lim_{v\to\pi/3} \frac{1-2\cos v}{\operatorname{sen}\left(v-\frac{\pi}{3}\right)}$$

Resolución:

Haciendo el cambio de variable: $x = v - \frac{\pi}{3} \quad \rightarrow \quad v = \mathrm{x} + \frac{\pi}{3}$

Además, como $v \to \frac{\pi}{3}$ $\quad entonces \quad x \to 0$

Luego:

$$\lim_{v\to\pi/3} \frac{1-2\cos v}{\operatorname{sen}\left(v-\frac{\pi}{3}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\left(cosx.cos\frac{\pi}{3} - senx.sen\frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx + \sqrt{3}senx}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{\operatorname{sen} x} + \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3}senx}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \sqrt{3} + \lim_{x\to 0} \frac{sen^2x}{(1 + cosx)\operatorname{sen} x}$$

$$= \sqrt{3} + \lim_{x\to 0} \frac{senx}{1 + cosx} = \sqrt{3} + \frac{0}{2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \lim_{v\to \pi/3} \frac{1 - 2\cos v}{\operatorname{sen}\left(v - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}$$

3. Si la función f es continua $\forall\ x \in \left[-\frac{1}{4}; 1\right]$ entonces hallar el valor de: $\left(\sqrt{b - n} + \frac{\text{a}}{c}\right)^m$ 3 pts.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(\pi x - n)}{x^2 + mx} & ; \quad x \in \left[-\frac{1}{4}; n\right[\cup \left[\frac{3}{4}; 1\right[\\ 3\text{a} - 4(\text{a} - b)x & ; \quad x \in \left[0; \frac{3}{4}\right[\\ c & ; \quad x = -m \end{cases}$$

Resolución:

Observando los dominios parciales se deduce que: $\boldsymbol{n = 0}$ y $\boldsymbol{m = -1}$

Luego, al reemplazar estos valores obtenemos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(\pi x)}{x^2 - x} & ; \quad x \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right[\cup \left[\frac{3}{4}; 1\right[\\ 3\text{a} - 4(\text{a} - b)x & ; \quad x \in \left[0; \frac{3}{4}\right[\\ c & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

Analizando la continuidad:

- ✓ Para $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \ \rightarrow\ 3\text{a} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\pi x)}{x^2 - x} \ \rightarrow\ 3\text{a} = -\pi \ \rightarrow\ \mathbf{a} = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$$

- ✓ Para $x = \frac{3}{4}$

$$\lim_{x\to\frac{3}{4}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{4}^+} f(x) \rightarrow -\pi - 3\left(-\frac{\pi}{3} - b\right) = \lim_{x\to\frac{3}{4}} \frac{\mathrm{tg}(\pi x)}{x^2 - x} \rightarrow 3b = \frac{16}{3} \rightarrow \boldsymbol{b = \frac{16}{9}}$$

✓ Para $x = 1$

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \rightarrow c = \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{tg}(\pi x)}{x^2 - x} \rightarrow c = \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{tg}(\pi(x-1)+\pi)}{x(x-1)} \rightarrow \boldsymbol{c = \pi}$$

Finalmente:

$$\left(\sqrt{b-n} + \frac{a}{c}\right)^m = \left(\sqrt{\frac{16}{9} - 0} + \frac{-\frac{\pi}{3}}{\pi}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right)^{-1} = \mathbf{1}$$

4. Use las cuatro funciones que siguen: $y_1 = \cos(x)$; $y_2 = tg(x)$; $y_3 = -\frac{1}{x}$; $y_4 = e^x$ para construir una función f continua sobre $\mathbb{R} - \{x_0\}$ definida sobre dominios parciales y que tenga una sola asíntota vertical y una horizontal. Su respuesta debe estar sustentada en conceptos matemáticos. 4 pts.

Construcción:

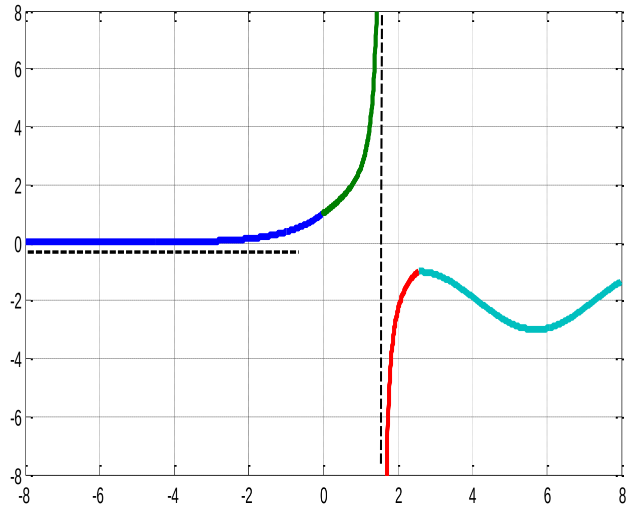
Luego de definir cada una de las funciones, una opción de construcción de f sería:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & ; \quad x \leq 0 \\ tg(x) + 1 & ; \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} & ; \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} + 1 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2} - 1\right) - 2 & ; \quad \frac{\pi}{2} + 1 \leq x \end{cases}$$

Así, f es continua sobre $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ y solo tiene una asíntota vertical: $x = \frac{\pi}{2}$ porque:

$$\lim_{x\to\pi/2^-} (tg\, x + 1) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \left(-\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}\right) = -\infty$$

y una asíntota horizontal: $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$



5. Mediante la definición formal de límite, demostrar que: 4 pts.

$$\underset{x \to \frac{1}{2}}{Lim} \sqrt{2+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = 1$$

Demostración:

$Siendo\ f(x) = \sqrt{2+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = \sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}$ $entonces\ D_f = x \in \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup]1, +\infty[- \{0\}$

Luego, aplicando la definición formal de límite tenemos:

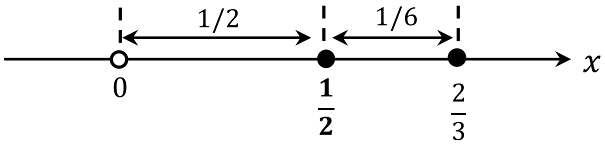
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \sqrt{2+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = 1 \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ tal\ que\ si\ 0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \wedge x \in D_f \to |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$$Como\ |f(x)-1| = \left|\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}} - 1\right| = \frac{\left|\frac{3x-2}{x-1} - 1\right|}{\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}} + 1} = \frac{2}{|x-1|} . \frac{1}{\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}} + 1} . \left|x - \frac{1}{2}\right| \qquad \dots (*)$$

En $(*)$ debemos acotar $\frac{2}{|x-1|}$ y $\frac{1}{\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}+1}$.

- Acotando $\frac{2}{|x-1|}$

Necesitamos un δ apropiado, entonces observando el D_f y los valores próximos a $\frac{1}{2}$ tenemos:



De donde, se concluye que un δ apropiado sería $\delta = \frac{1}{6}$

Reemplazando en la hipótesis $\left|x-\frac{1}{2}\right| < \delta$ se obtiene:

$$\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{6} \;\color{red}{\rightarrow}\; -\frac{1}{6} < x-\frac{1}{2} < \frac{1}{6} \;\color{red}{\rightarrow}\; -6 < \frac{2}{x-1} < -3 \;\color{red}{\rightarrow}\; \boldsymbol{\frac{2}{|x-1|} < 6}$$

- Acotando $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}+1}$

$$Si\ x \in D_f \;\color{red}{\rightarrow}\; \sqrt{\frac{3x-2}{x-1}} \geq 0 \;\color{red}{\rightarrow}\; \sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}+1 \geq 1 \;\color{red}{\rightarrow}\; \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}+1} \leq 1}$$

$$Finalmente: \frac{2}{|x-1|}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}+1}\cdot\left|x-\frac{1}{2}\right| < (\mathbf{6})(\mathbf{1})\delta \;\color{red}{\rightarrow}\; |f(x)-1| < 6\delta \;\color{red}{\rightarrow}\; \delta = \frac{\varepsilon}{6}$$

$$Por\ lo\ tanto, escogiendo\ un\ \ \delta = mín\left\{\frac{1}{6};\frac{\varepsilon}{6}\right\}\ se\ ha\ demostrado\ que\ \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = 1$$

6. Dada la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

a) Calcule la derivada de f usando la definición. 2 pts.

b) Halle la ecuación general de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 4$. 2 pts.

Resolución:

a) Usando la definición

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0} -\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}\left(\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)\right.} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

b) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 4$

$$f'(4) = -\frac{1}{2\sqrt{4^3}} = -\frac{1}{16}$$

Ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 4$. Punto de tangencia: $(4\ ,\ 1/2)$

$$-\frac{1}{16}=\frac{y-\frac{1}{2}}{x-4}$$

Ecuación general de la recta tangente a la gráfica de f en $x=4$.

$$16y+x-12=0$$

UNI, 09 de Mayo del 2016
Lic. Adriana Valverde Calderón
Lic. Héctor Alexis Herrera Vega
Ing. Javier Gonzalo