UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERIA AMBIENTAL



# SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE MATEMÁTICA BÁSICA I

**DOCENTE: Mg. Gamaniel Gonzales Salvador**

| FACULTAD | FACULTAD DE INGENIERÍA AMBIENTAL | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AREA | DE CIENCIAS BÁSICAS | | | | | | |
| Período lectivo | 2017-I | AULA | D2-151 | CURSO | AA 212 | SECCION | |
| Fecha de evaluación | 10 /05 /2017 | Horario | 14:00 a 16:00 Hr. | | | | |

**BLOQUE TEÓRICO: ( 3 ptos)**

*1.- Defina:* *a)* Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ : es un **segmento orientado** que va del punto A (**origen**) al punto B (**extremo**).

***b) Una dirección: Es la** dirección **de la** recta **que contiene al** vector **o de cualquier** recta paralela **a ella.***

c) El **sentido del vector** $\overrightarrow{AB}$ **:El que va del origen A al extremo B.**

**BLOQUE ANALÍTICO: ( 5 ptos)**

**2.- Los vértices de un Triángulo son *A(-2,2)*, *B(2,6)* y *C(6,-4)*:**

*a)* **Demostrar** que la recta que une los ***puntos medios*** de dos de sus lados es ***Paralela*** al tercero.

*b)* **Demostrar** que sus tres ***medianas*** se cortan en el mismo punto.

*c)* **Demostrar** que el punto de ***intersección*** de las ***medianas***, llamado **centroide** del triángulo, está situado a las ***dos terceras partes*** de la magnitud total de cada ***Mediana***, a partir del ***vértice*** correspondiente.

SOLUCIÓN

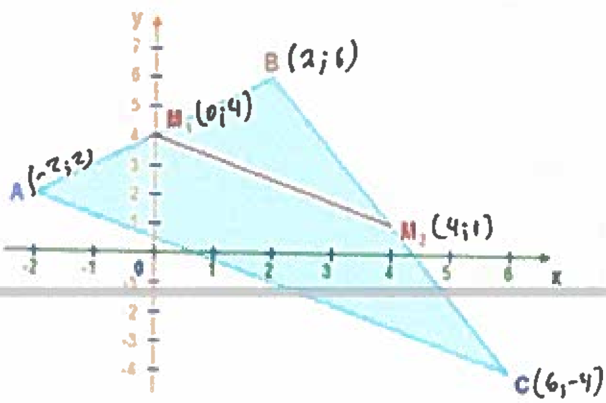
Llevando los datos a la gráfica de la *Figura*

a)Las coordenadas del *punto medio* del lado $\overline{AB}$ están dadas por:

$$x_{M_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0$$

$$y_{M_1} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

Por tanto, las coordenadas del *punto medio* del lado $\overline{AB}$ son: $M_1(0,4)$




*Figura*

Las coordenadas del ***punto medio*** del lado $\overline{BC}$ están dadas por:

$$x_{M_2} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

$$y_{M_2} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{6-4}{2} = 1$$

Por tanto, las coordenadas del ***punto medio*** del lado ***BC*** son: $M_2(4;1)$

Para que las rectas $\overline{M_1M_2}$ y $\overline{AC}$ sean ***paralelas***, debieren tener la misma ***pendiente***, lo cual necesitamos comprobar. Así tenemos que:

***Pendiente*** de $\overline{M_1M_2} = \frac{4-1}{0-4} = -\frac{3}{4}$

***Pendiente*** de $\overline{AC} = \frac{2+4}{-2-6} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$

Puesto que ambas ***pendientes*** son iguales, las rectas son ***paralelas***.

**b)** En el inciso anterior, se determinaron las coordenadas de los ***puntos medios*** de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, dados por $M_1$ y $M_2$, respectivamente. Las coordenadas del ***punto medio*** del lado $\overline{AC}$ están dadas por:

$$x_{M_3} = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2$$

$$y_{M_3} = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2-4}{2} = -1$$

Por tanto, las coordenadas del punto medio del lado $\overline{AC}$ son: $M_3(2;-1)$

Para demostrar que las tres ***medianas*** se cortan en el mismo punto, primero se deben encontrar sus ecuaciones, para después hacer simultáneas dos de ellas y sustituir los valores encontrados en la tercera ecuación para comprobar que se verifican. Para esto, tendremos que la ecuación de cada ***mediana*** corresponde a la fórmula

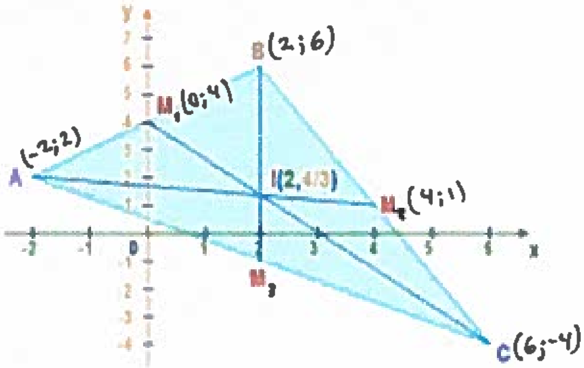
De acuerdo a la definición de la ***mediana***, sustituimos los valores de las coordenadas de los puntos ***C*** y ***$M_1$*** en la fórmula para obtener la ecuación de la ***mediana*** $\overline{CM_1}$:

$$y+4 = \frac{4+4}{0-6}(X-6) \Rightarrow y+4 = \frac{4}{-3}(x-6)$$

$$y+4 = \frac{-4}{3}x + 8$$

Despejando a y:

$$\boxed{y = -\frac{4}{3}x + 4} \qquad (1)$$




Figura

Para la ecuación de la mediana $\overline{AM_2}$, sustituimos los valores de las coordenadas de los puntos ***A*** y ***$M_2$*** en la fórmula

$$y-2 = \frac{1-2}{4+2}(x+2) \Rightarrow y = 2 + \frac{-1}{6}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{3} + 2$$

Despejando a y:

Y=-1/6X+ 5/3

En el caso particular de la mediana $\overline{BM_3}$, según la ***Figura***, observamos que los puntos por la que ésta pasa tienen la misma ***abscisa***, por lo que esta recta es ***paralela*** al eje de ***ordenadas*** y su ecuación es simplemente x=2...(3)

Para comprobar la ecuación anterior, se sustituyen las coordenadas de los puntos ***B*** y ***$M_3$*** en la fórmula **(IX)**, multiplicando previamente ambos miembros de la ecuación por $x_2$-$x_1$ para evitar dividir entre cero:

$$(2-2)(y-6) = (-1-6)(x-2) = -7(x-2) = -7x+14$$

$$0\,(y-6) = -7x+14$$

$$0 = -7x+14$$

Despejando a x: x = 2

Con lo cual queda comprobado.

Enseguida, haciendo simultáneas las ecuaciones (2) y (3), para lo cual sustituimos (3) en (2):

$$y = -\frac{1}{6}(2) + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

De lo anterior, concluimos que el punto de ***intersección*** de las ***medianas*** $AM_2$ y $BM_3$, representadas por las ecuaciones (2) y (3) es: I(2;4/3)

Sustituyendo las coordenadas del punto I en la ecuación (1), se obtiene:

$$\frac{4}{3} = \frac{-8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{4}{3}$$

Con lo que queda demostrado que las ***medianas*** del triángulo se ***cortan*** en el mismo punto.

**c) C) APLICANDO EL TEOREMA DE DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS: DE C a I y de C a $M_1$ son :**

$$\overline{CI} = \sqrt{(6-2)^2 + (-4-\tfrac{4}{3})^2} = \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3} = \frac{2}{3}(10)$$

$$\overline{CM_1} = = \sqrt{(6-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\rightarrow \overline{CI} = \frac{2}{3}\overline{CM_1}$$

**De la misma forma, las distancias de A a I y de A a $M_2$ son :**

$$\overline{AI} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-\tfrac{4}{3})^2} = \sqrt{\frac{148}{9}} = \frac{2}{3}(\sqrt{37})$$

$$\overline{AM_2} = \sqrt{(-2-4)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{37}$$

$\rightarrow \overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AM_2}$ **por lo tanto las distancias de B a I y de B a $M_3$, están dadas por :**

$$\overline{BI} = \sqrt{(2-2)^2 + (6-\tfrac{4}{3})^2} = \frac{14}{3} = \frac{2}{3}(7)$$

$$\overline{BM_3} = = \sqrt{(2-2)^2 + (6+1)^2} = 7$$

por lo tanto : $\overline{BI} = \frac{2}{3}\overline{BM_3}$

**Con lo que queda comprobado que el Centroide del triángulo está situado a las dos terceras partes de la longitud de cada mediana, a partir del vértice correspondiente.**

**BLOQUE OPERATIVO: ( 12 ptos)**

3. Un ángulo θ entre: $L_1: P = B + t\vec{a}$ y $L_2: P = A + s\vec{b}$ Satisfacen Tanθ=5/7. Si L1∩L2={c}, c Є 4º cuadrante, la pendiente de L2 es -1. B=(0,4), $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = (5,-25)$. Halle los puntos A y C.

solucion

$l_1$ : P = B + $t\vec{a}$ , $l_2$ : P = A + $s\vec{b}$ , Tanθ = $\frac{5}{7}$ , c Ɛ IV C , B= (0;4) , $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ = (5;-25)

$l_1$: P = (o;4) + $t\vec{a}$ y $l_2$ : A + s(1;-1) , luego Tanθ=$\frac{5}{7}$>0 , θ es el angulo entre $l_1$ y $l_2$

Tanθ=$\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$ → $\frac{5}{7}$ =$\frac{-1-m_1}{1+(-1)m_1}$ → $m_1$= -6 , pero $m_1 = \frac{4-c_2}{0-c_1}$ →6$c_1$= 4-$c_2$...(i)

$m_2 = \frac{c_2-a_2}{c_1-a_1}$ = -1 → $c_1 + c_2 = a_1 + a_2$...(ii)

para los vectores del dato : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = (5,-25)$ →C-A+C-B = $(5,-25)$

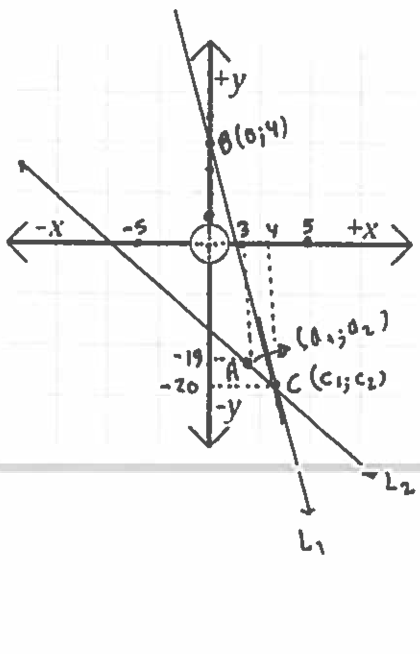
→ 2C-(A+B)= $(5,-25)$ →2($c_1$;$c_2$)-(($a_1$; $a_2$) + (0; 4)) = (5;25)

→ $\begin{cases} 2c_2 - a_2 = -21 \ldots (1) \\ 2c_1 - a_1 = 5 \ldots (2) \end{cases}$ → (1)+(2) : 2($c_1$+$c_2$) −($a_1 + a_2$) =5-21=-16….(σ)

luego , (i) en (σ) : 1-$c_2$= 6(-16-$c_2$) → $c_2$ = -20 ^ $c_1$ = 4 → C(4;-20) en (1) y (2)

$a_1$= 3 y $a_2$ = -19 → A( 3 ; -19)

Rta: por lo tanto los puntos pedidos son : A(3;-19) Y C( 4;-20)



**4.- L es una recta que pasa por el punto (8; 3), cuya intersección con el eje Y es negativa, y que determina, con los ejes coordenados, un triángulo cuyo perímetro es de 12u. Encontrar la ecuación vectorial y simétrica de la recta L**

solución

Como L es una recta no vertical y (8;3) Ɛ L , sea "m" su pendiente es decir : L = $\{(8;3)+(1;m)\ tal\ que\ t \in R\}$ = = $\{(8+t;3+mt)\}$, la intersección de L con el eje X se obtiene cuando . 3+mt=0 →t=$\frac{-3}{m}$, es decir L ∩ ejeX = $\left\{\left(8-\frac{3}{m};0\right)\right\}$ de aquí $\frac{8m-3}{m}>0$

entonces las longitudes de los catetos y de la hipotenusa del triángulo determinado por L y los ejes coordenados son:

$|3-8m|$ y $\left|\frac{8-m}{3}\right|$ →$\sqrt{(8m-3)^2+(\frac{8m-3}{m})^2}$ = $\left(\frac{8M-3}{3}\right)\sqrt{m^2+1}$

el perímetro: $8-\frac{3}{m}+\frac{8m-3}{m}+\left(\frac{8M-3}{3}\right)\sqrt{m^2+1}=12$

→$(\frac{8m-3}{m})$(m+1+$\sqrt{m^2+1}$ ) = 12 → (m+1+$\sqrt{m^2+1}$) =$\frac{12m}{8m-3}$

desarrollando la ecuación aplicando sus respectivos algoritmos obtenemos : $32m^2+35m-45=0$ → m= -15/8 ∨ m = $\frac{3}{4}$ → m>0 por lo tanto m = $\frac{3}{4}$ y (1,m) = (1;$\frac{3}{4}$) = $\frac{1}{4}$(4;3) es un vector paralelo a L, es decir .

Rpta

$$\boxed{L=\{(8;3)+t(4;3)\ tal\ que\ t\in R\}\ \wedge\ L:\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1}$$

**5.-Dos vectores $\vec{a},\vec{b}$ de $R^2$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes y Tiene longitudes De $|\vec{a}| = 2$ , $|\vec{b}| = 4$ , hallar el coseno formado Por los vectores $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$**

solución

**El coseno del ángulo formado por los vectores $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ esta dado por:**

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \|\vec{a}+\vec{b}\|\,\|\vec{a}-\vec{b}\|\mathrm{Cos}\Theta$$
$$\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}+\vec{b}\|\,\|\vec{a}-\vec{b}\|\mathrm{Cos}\Theta$$
$$4 - 16 = \|\vec{a}+\vec{b}\|\,\|\vec{a}-\vec{b}\|\mathrm{Cos}\Theta$$
$$-12 = \|\vec{a}+\vec{b}\|\,\|\vec{a}-\vec{b}\|\mathrm{Cos}\Theta\ldots\ldots.(\mu)$$

Pero sabemos : $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a}\vec{b}$ ...(i)

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a}\vec{b} \ldots..(ii)$$

y entre los vectores $\vec{a},\vec{b}$ el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{3} \rightarrow \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|Cos\alpha$

$$\vec{a}\,\vec{b} = 2.4.\tfrac{1}{2} \rightarrow \vec{a}\,\vec{b} = 4$$

Reemplazando en i y ii : : $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = 28$ y $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 12$

Ahora lo reemplazamos en. ($\mu$): $-12 = \sqrt{28}\sqrt{12}\mathrm{Cos}\theta \rightarrow \mathrm{Cos}\theta = -\sqrt{\frac{3}{7}}$

**Rpta :** $\boxed{\text{el Cos}\theta = -\frac{\sqrt{21}}{7}.}$ *