UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA AMBIENTAL
AREA DE CIENCIAS BASICAS

CURSO: MATEMATICA III

EXAMEN PARCIAL

DOCENTES: Ing. Hugo Morales Alvarado, Lic. César Cabrera, Lic Bonifacio

FACULTAD			**FACULTAD DE AMBIENTAL**				
AREA			**DE CIENCIAS BASICAS**				
Período lectivo	**2017-I**	**AULA**	**TODAS**	**CURSO**	**AA 231**	**SECCION**	TODAS
Fecha de evaluación	**11 /05 /2017**	**Horario**	**4:00 a 6:00**			Fila (*)	

Indicaciones:

- No está permitido el uso de celulares: apáguelo y guárdelo.
- No está permitido el uso de apuntes, materiales de clase o separatas.
- Está permitido el uso personal de calculadoras no programables.
- La ortografía, claridad, redacción y limpieza serán tomadas en cuenta en la calificación.

---

1. Una partícula se mueve sobre una curva $C : r = 2(\cos\theta + sen\theta)$; $\theta \geq 0$ con velocidad constante e igual a 2m/s y se encuentra en el punto (2, 2) transcurrido $\frac{\pi}{8}\sqrt{2}$ seg. Determinar:

a) En el punto (2, 2) las componentes de la aceleración ; su vector velocidad y vector aceleración.

b)Cuanto tarda en ir del punto (2 ; 2) al punto que corresponde a $\theta = \pi$

(5 ptos.)

2. Hallar a y b para que la derivada direccional máxima de la función

$e^{ax+by}\cos(x+y)-z=0$ en el punto (0, 0) sea $3\sqrt{2}$ en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.

(5 ptos.)

3. Sea la función $f: R^2 \rightarrow R$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha}y}{x^2+y^2} & ; si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Donde α es un número entero. ¿ Para qué valores de "α" f es diferenciable en (0, 0). **(5 ptos.)**

4. Sea P un plano que pasa por el punto (2; 1 ; -2) y es perpendicular al plano xy. Q es un plano que contiene a la recta de mayor pendiente tangente a la superficie $x^2+y^2+z^2=12$ en el punto (2; -2 ; 2). Sabiendo que P y Q son paralelos, halle sus ecuaciones respectivamente

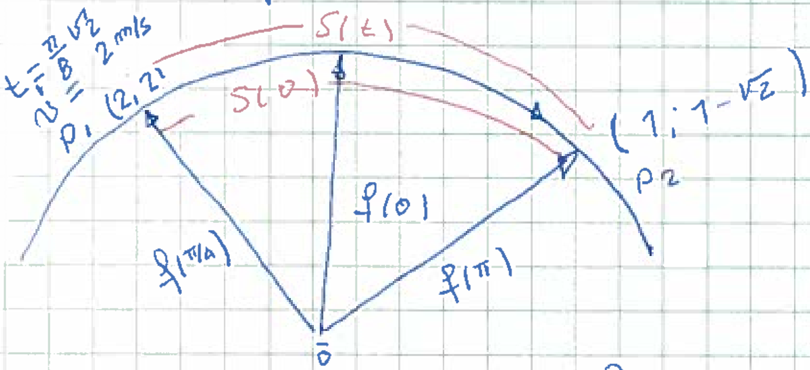
(5 ptos.)

SOLUCION N^o (1)

$\mathcal{C}: \quad r = 2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$

$\mathcal{C}: \quad \boxed{\mathcal{C}: \quad (x^2-1) + (y-1)^2} = (\sqrt{2})^2$ EN CARTESIANA

$\mathcal{C}: \quad f(\theta) = \left(\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta + 1;\ \sqrt{2}\cos\theta + 1\right)$



$$S(\theta) = \int_{\pi/4}^{\theta} |f'(\theta)|\,d\theta = \sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\theta} d\theta = \sqrt{2}\,\theta - \sqrt{2}\,(\pi/4)$$

$$\boxed{S(\theta) = \sqrt{2}\,\theta - \sqrt{2}\,(\pi/4)} \quad (\alpha)$$

$S(t) = ?$ $\quad \frac{ds}{dt} = 2 \rightarrow \int ds = \int 2\,dt = s = 2t + C_1$

$C_1 = ?.\quad$ Si $t = \frac{\pi}{8}\sqrt{2} \rightarrow S = 0 \rightarrow \boxed{C = -\frac{\pi}{4}\sqrt{2}}$

$$\boxed{S(t) = 2t - \frac{\pi}{4}\sqrt{2}} \quad \beta$$

Se cumple: $\boxed{S(t) = S(\theta)}$ (I)

Reemplazando: α, β en I y simplificando queda:

$$\boxed{\sqrt{2}\,\theta = 2t} \quad (II) \quad / \quad \boxed{\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2}}$$

a) $\bar{V} = \frac{d\bar{f}}{dt} = \frac{d\bar{f}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = (\sqrt{2}\cos\theta;\ -\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)\sqrt{2}$

$\bar{V} = (2\cos\theta,\ -2\operatorname{sen}\theta)$

$$\boxed{\bar{V}(\pi/4) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})}$$

$\bar{a} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = (-2\operatorname{sen}\theta;\ -2\cos\theta)\sqrt{2}$

$\boxed{\bar{a}(\pi/4) = (-2, -2)}$ $\quad / \quad \boxed{\begin{array}{l} a_T = 0 \\ a_N = |\bar{a}| = 2\sqrt{2} \end{array}}$

b) $\boxed{\Delta t = t_2 - t_1}$ (III)

Si $\theta = \pi \rightarrow t_2 = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}$ en (III)

$$\boxed{\Delta t = \frac{3\sqrt{2}}{8}\pi \text{ seg}}$$

SOLUCION Nº (2)

$$f(x,y) = e^{ax+by}\cos(x+y)$$

DATO: $\boxed{D_{\vec{u}} f(0,0)_{MAX} = 3\sqrt{2}}$ ~ (I)

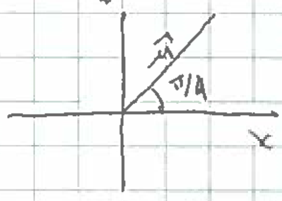
$$\boxed{\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}; \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right) = (a,b)}$$

$$D_{\vec{u}} f(0,0)_{MAX} = |\nabla f(0,0)| = \sqrt{a^2+b^2}$$

∴ en (α) : $\sqrt{a^2+b^2} = 3\sqrt{2}$

entonces: $\left(\sqrt{(a^2+b^2)}\right)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$

∴ $\boxed{a^2+b^2 = 18}$ (α)



$D_{\vec{u}} f(0,0)_{MAX} = \nabla f(0,0)\cdot\vec{u}$ / $\vec{u} = (\cos(\pi/4); \sin(\pi/4))$

$$\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(0,0)_{MAX} = (a,b)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}}$$

OPERANDO QUEDA: $\boxed{(a+b) = 6}$ (B)

RESOLVIENDO DE (α) y (B)

RESPTA: $\boxed{a = b = 3}$

SOLUCION N° (3)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha} \cdot y}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

SOLUCION

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \right] = \cancel{0} \; / \; \alpha > 2$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{y \to 0} \left[\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} \right] = 0 \; / \; \underline{\alpha \in \mathbb{R}}$$

Empleando la definicion DE DIFERENCIABILIDAD

$$\boxed{\Delta f(0+\Delta x, 0+\Delta y) = \varepsilon_1 (\Delta x) + \varepsilon_2 (\Delta y)} \; / \; df(0,0) = 0$$

$$\frac{(\Delta x)^{\alpha} \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \varepsilon_1 (\Delta x) + \varepsilon_2 (\Delta y)$$

Si $\varepsilon_1 = 0 \wedge \varepsilon_2 (\cancel{\Delta y}) = \dfrac{(\Delta x)^{\alpha} \cancel{\Delta y}}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$$\boxed{\varepsilon_2 = \frac{(\Delta x)^{\alpha}}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} (\varepsilon_2) = 0$ solo cuando $\boxed{\alpha > 2}$

RESPTA

SOLUCION N° 4

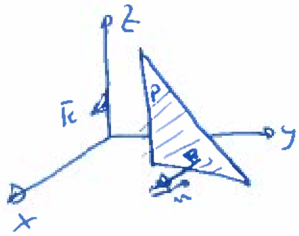
(4) $x^2+y^2+z^2=12$

$\nabla f(\vec{x_0}) = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$

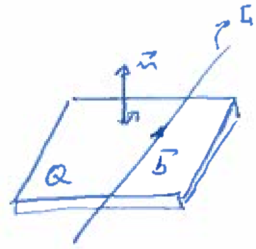
$\nabla f(2;-2;2) = (4;-4;4) \parallel (1;-1;1) = \vec{b}$

Si L es la recta de mayor pendiente, entonces

$L: \{\vec{x_0} + t\nabla f(x_0)\}$



a)



b)

$\therefore\ L: (2,-2,2)+r(1,-1,1),\ r\in\mathbb{R}$

$\vec{b}=(1,-1,1)$

$P \parallel Q \Rightarrow$ sus normales son iguales

Cálculo de $\vec{m}$

$$\left.\begin{array}{l} P \perp XY \rightarrow \vec{m}\perp\vec{k} \\ L\subset Q \rightarrow \vec{m}\perp\vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{m} = \vec{k}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1;1;0) = \vec{n}$$

obtención de los planos:

$P: (P - P_0)\vec{m} = 0 \quad \wedge \quad Q: (P - Q_0)\vec{m} = 0$

$[(x,y,z)-(2;1;-2)](1;1;0)=0 \qquad [(x,y,z)-(2;-2;2)](1;1;0)=0$

$P: x+y=3 \quad \wedge \quad Q: x+y=0$