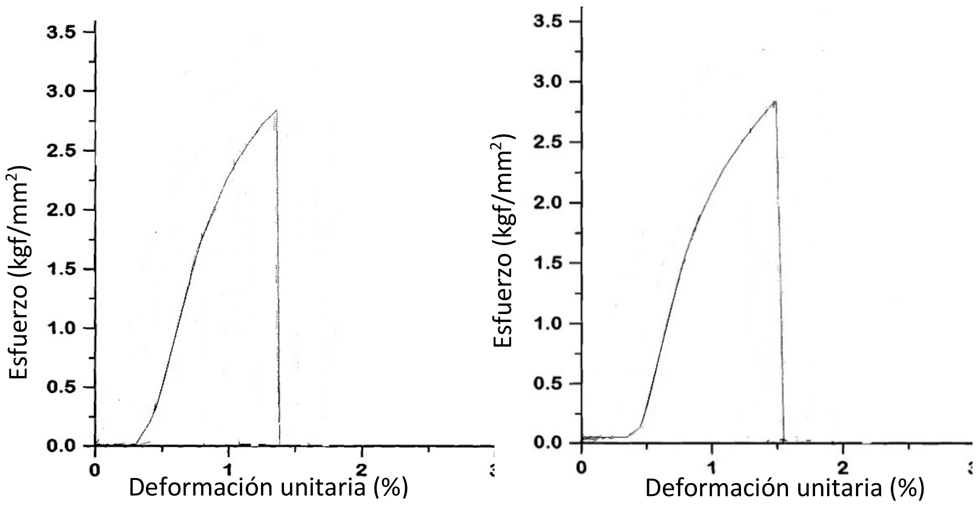
EXAMEN PARCIAL DE FÍSICA 2 – AA 234 (E, F y G)

Profesores : Manuel Estrada, Sheila Malpartida y César Diez
Fecha : 11 de mayo 2017 **Hora:** 09:00 a 11:00 am
Indicaciones : escoger 4 preguntas y resolverlas de forma clara, justificando correctamente sus procedimientos. No se permiten préstamos de calculadoras ni correctores, así como el uso de celulares.

Pregunta 1: (5 puntos)

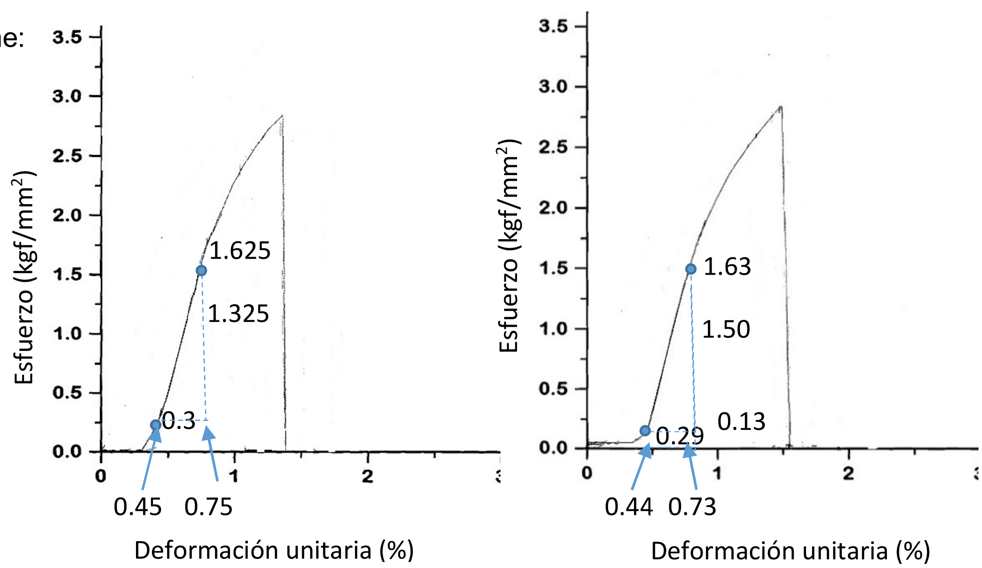
Los documentos históricos son frecuentemente atacados por hongos, dejándo manchas negras sobre las hojas, provocándo así la pérdida de la información. La forma más eficaz de controlar estas proliferaciones de hongos es irradiar con radación gamma a dichos documentos históricos. Para controlar que esta técnica no altere el papel del documento, se realizan previamente pruebas de tracción sobre tiras de papel, antes y después de irradiar con radiacion gamma. Las figuras 1a y 1b muestran dichos ensayos mecánicos de tracción, llevados a cabo sobre tiras de papel de 10.0 cm de largo, 2.00 cm de ancho y 0.07 mm de espesor.



(a) (b)

Figura 1: *ensayo mecánico de tracción sobre una tira de papel sin irradiar (a) e irradiado con una fuente gamma (b)*

Determine:



(a) El módulo de elasticidad del papel antes y después de la irradiación.

Del gráfico:

$$E_a = \frac{1.4375}{0.3/_{100}}\frac{kgf}{mm^2} = 480\ \frac{kgf}{mm^2} \qquad E_b = \frac{1.5}{0.29/_{100}}\frac{kgf}{mm^2} = 517\ \frac{kgf}{mm^2}$$

$$E_a = 480\ \frac{kgf}{mm^2} \quad (antes) \quad E_b = 517\ \frac{kgf}{mm^2} \quad (después)$$

(b) ¿Podría decirse que la irradiación recibida alteró el comportamiento mecánico del papel?

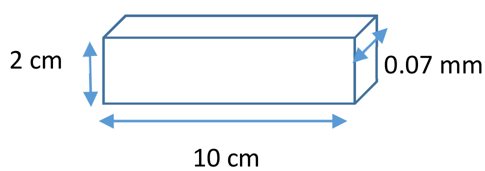
Si el módulo elástico después de la radiación es mayor que antes de la radiación, significa que se deforma menos, para una misma tensión.

(c) La energía elástica acumulada por la tira del papel durante los ensayos.

(Dato: 1 kgf = 9.81 N)

El área bajo la curva en el gráfico $\sigma - \varepsilon$ da la energía elástica acumulada por unidad de volumen, entonces:

$$A = \frac{Energía\ elástica\ almacenada}{Volumen}$$



$$V = 2 \times 10 \times 0.007$$
$$V = 0.14\ cm^3$$
$$V = 0.14\ cm^3 \times \frac{1m^3}{10^6 cm^3}$$
$$V = 1.4 \times 10^{-7}\ m^3$$

$$A_a = \frac{1}{100}\begin{cases}\left[\frac{0.2 * 0.3}{2} + \left(\frac{0.1875 + 1.625}{2}\right) \times 0.3 + \left(\frac{1.625 + 2.8}{2}\right) \times 0.7\right]\frac{kgf}{mm^2} \times \frac{9.81\ N}{1\ kgf} \times \frac{10^6 mm^2}{m^2} \\ (0.03 + 0.27 + 1.55) \times 9.81 \times 10^6\,\frac{N}{m^2} = 1.81 \times 10^5\ \frac{N}{m^2}\end{cases}$$

$$A_b = \frac{1}{100}\begin{cases}\left[0.06 * 0.47 + \left(\frac{0.125 + 1.625}{2}\right) \times 0.29 + \left(\frac{1.625 + 2.8}{2}\right) \times 0.64\right]\frac{kgf}{mm^2} \times \frac{9.81\ N}{1\ kgf} \times \frac{10^6 mm^2}{m^2} \\ (0.03 + 0.25 + 1.42) \times 9.81 \times 10^6\,\frac{N}{m^2} = 1.7 \times 10^5\ \frac{N}{m^2}\end{cases}$$

El volumen de la muestra es:

$$V = 1.4 \times 10^{-7}\ m^3$$

Energía almacenada antes, será:

$$W_a = A * V = 1.81 \times 10^5\ \frac{N}{m^2} * 1.4 \times 10^{-7}\ m^3 = 0.0253\,J$$

Energía almacenada después, será:

$$W_b = A * V = 1.7 \times 10^5 \ \frac{N}{m^2} * 1.4 \times 10^{-7} \ m^3 = 0.0238 \, J$$

Pregunta 2: (5 puntos)

Dos varillas cilíndricas sólidas, AB y BC, están soldadas en la unión B y cargadas como se muestra en la figura 2. Si se sabe que el esfuerzo normal promedio no debe ser mayor que 175 MPa en la varilla AB y 150 MPa en la varilla BC:

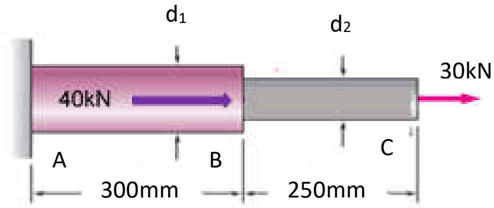
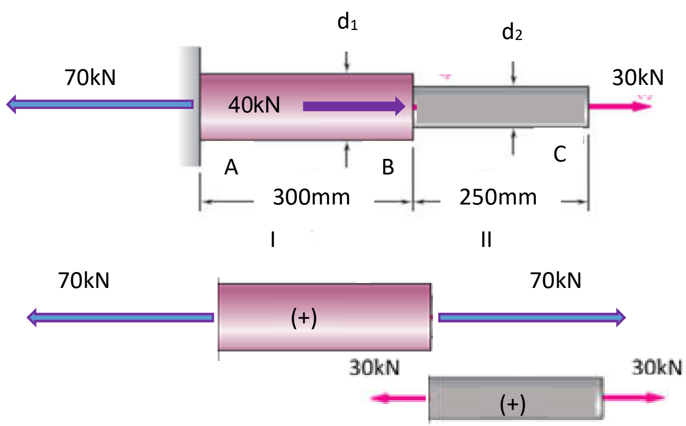


Figura 2

(a) Realice los diagramas de cuerpo libre para cada varilla.



(b) Encuentre los valores mínimos permisibles de d_1 y d_2, siendo éstos los diámetros de las varillas AB y BC, respectivamente.

En la barra I:

$$\sigma_1 \leq 175 \ MPa \ \Longrightarrow \ \sigma_1 = 175 \ MPa = \frac{70 \ kN}{A_1}$$

$$A_1 = \frac{70000 \ Nm^2}{175 \ \times 10^6 \ N} = 4 \times 10^{-4} \ m^2$$

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$$

$$d_1^2 = \frac{4}{\pi} A_1 = \frac{16 \times 10^{-4} m^2}{\pi} = 5.1 \times 10^{-4} m^2$$

$$d_1 = 2.25 \times 10^{-2} m \times \frac{1000 \ mm}{m} = 22.5 \ mm$$

En la barra II:

$$\sigma_2 \leq 150 \ MPa \ \Longrightarrow \ \sigma_2 = 150 \ MPa = \frac{30 \ kN}{A_2}$$

$$A_2 = \frac{30000 \ Nm^2}{150 \ \times 10^6 \ N} = 2 \times 10^{-4} \ m^2$$

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$$

$$d_2^2 = \frac{4}{\pi}A_2 = \frac{8\times10^{-4}m^2}{\pi} = 2.55\times10^{-4}m^2$$
$$d_2 = 1.6\times10^{-2}m \times \frac{1000\ mm}{m} = 16\ mm$$

(c) Si los diámetros fueran d_1 = 50 mm y d_2 = 30 mm, halle el esfuerzo normal promedio en la sección media de cada varilla.

Si $d_1 = 50\ mm \quad \rightarrow \quad A_1 = 1962.5\ mm^2 = 1.96\times10^{-3}\ m^2$
Si $d_2 = 30\ mm \quad \rightarrow \quad A_2 = 706.5\ mm^2 = 0.71\times10^{-3}\ m^2$

$$\sigma_1 = \frac{70\ kN}{A_1} = \frac{70000\ N}{1.96\times10^{-3}\ m^2} = 35.71\ MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{30\ kN}{A_2} = \frac{30000\ N}{0.71\times10^{-3}\ m^2} = 42.25\ MPa$$

(d) Si los módulos de elasticidad de las varillas AB y BC son $20\text{x}10^{10}$ N/m^2 y $17\text{x}10^{10}$ N/m^2, respectivamente y los coeficientes de Poisson 0.3 para ambas varillas, determine las deformaciones en la longitud y en el diámetro en cada varilla.

Si se toma datos de (b):

Si $\begin{matrix} E_1 = 20\times10^{10}\,{}^{N}\!/_{m^2} \\ E_2 = 17\times10^{10}\,{}^{N}\!/_{m^2} \end{matrix}$ $\qquad \mu = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_x} = 0.3 \qquad \begin{matrix} \sigma = E\varepsilon \\ \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \end{matrix}$

Para la barra I:
$$\begin{cases} A_1 = 4\times10^{-4}\ m^2 \quad \rightarrow \quad \Delta x_1 = \frac{70000\ N\times30\ cm}{20\times10^{10}\frac{N}{m^2}\times4\times10^{-4}m^2} = \frac{2.1\ cm}{8\ 0} = 0.026\ cm \\ \varepsilon_{x_1} = \frac{\Delta x_1}{L_x} = \frac{0.26\ cm}{30} = 8.75\times10^{-4} \\ \varepsilon_d = -\mu\varepsilon_{x_1} = -0.3(8.75\times10^{-4}) = -0.00026 = \frac{\Delta d_1}{d_1} \\ \Delta d_1 = -0.0026\times22.5\ mm = -0.0058\ mm \end{cases}$$

Para la barra II:
$$\begin{cases} A_2 = 2\times10^{-4}\ m^2 \quad \rightarrow \quad \Delta x_2 = \frac{30000\ N\times25\ cm}{17\times10^{10}\frac{N}{m^2}\times2\times10^{-4}m^2} = \frac{0.75\ cm}{34} = 0.02\ cm \\ \varepsilon_{x_2} = \frac{\Delta x_2}{L_x} = \frac{0.02\ cm}{25} = 0.8\times10^{-3} \\ \varepsilon_d = -\mu\varepsilon_{x_2} = -0.3(0.8\times10^{-3}) = -0.00024 = \frac{\Delta d_2}{d_2} \\ \Delta d_2 = -0.00024\times16\ mm = -0.0038\ mm \end{cases}$$

Si se toma datos de (c):

Si $\begin{matrix} E_1 = 20\times10^{10}\,{}^{N}\!/_{m^2} \\ E_2 = 17\times10^{10}\,{}^{N}\!/_{m^2} \end{matrix}$ $\qquad \mu = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_x} = 0.3 \qquad \begin{matrix} \sigma = E\varepsilon \\ \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \end{matrix}$

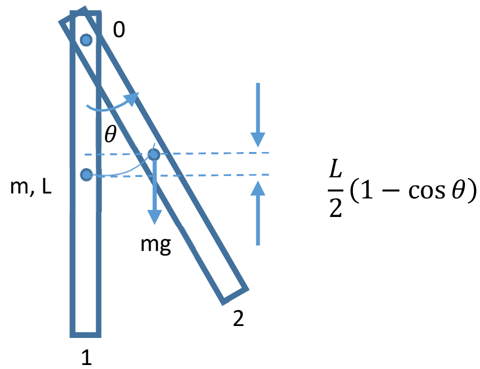
Para la barra I:
$$\begin{cases} A_1 = 4\times10^{-4}\ m^2 \quad \rightarrow \quad \Delta x_1 = \frac{\sigma_{AB}}{\gamma_{AB}}L_{AB} = \frac{35700000\ N\times30\ cm}{20\times10^{10}\frac{N}{m^2}} = 0.0054\ cm \\ \Delta d_1 = -0.3\times0.0054\times5\ cm = -0.00027\ cm \end{cases}$$

Para la barra II:

$$\begin{cases} A_2 = 2 \times 10^{-4}\, m^2 \quad \rightarrow \quad \Delta x_2 = \frac{\sigma_{BC}}{\gamma_B C} L_{BC} = \frac{42250000\, N \times 25\, cm}{17 \times 10^{10} \frac{N}{m^2}} = \frac{0.075\, cm}{3.4} = 0.0062\, cm \\ \Delta d_2 = -0.3 \times 0.0062 \times 30\, mm = -0.00022\, mm \end{cases}$$

Pregunta 3: (5 puntos)

Una barra uniforme de masa m y longitud L, oscila alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos, siendo este eje perpendicular al plano de oscilación. Si la amplitud angular θ es pequeña:



(a) Escriba la expresión de la energía mecánica del sistema

La energía mecánica en la barra en movimiento (posición 2) es $E = E_{rot} + E_{pot}$

$$E = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$$

Donde: $I_0 = {mL^2}/{3} \quad \sin\theta \approx \theta$

(b) Encuentre la ecuación diferencial y el periodo del movimiento

Como la energía del sistema es constante en el tiempo, entonces:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} I_0 \left(2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + mg\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$I_0\ddot{\theta} + mg\frac{L}{2}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{mgL}{2I_0}\right)\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{3mgL}{2mL^2}\right)\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{3g}{2L}\right)\theta = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{2L}$$

(c) Si la masa del rodillo es 0.50 kg y el periodo 1.5 s, encuentre la longitud del rodillo.

Si $T = 1.5\,s = 2\pi\sqrt{\frac{3L}{2g}}$ $\quad g = 10 m/s^2$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

$$L = \frac{(1.5)^2 \times 3 \times 10\,m}{2 \times (2\pi)^2} = 0.85\,m$$

(d) Determine el valor de energía cinética máxima de la barra, si la amplitud angular del movimiento es 10°.
(Dato: Icm de la barra = mL²/12)

$$Ec_{max} = Epot_{max}$$

$$\frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 = mg\frac{L}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$0.5\,kg * \frac{0.85}{2} * 10\,\frac{m}{s^2} * (1 - \cos 10°) = 0.0032\,J$$

Pregunta 4: (5 puntos)

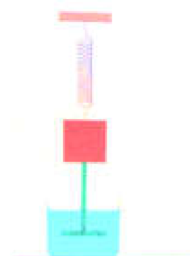
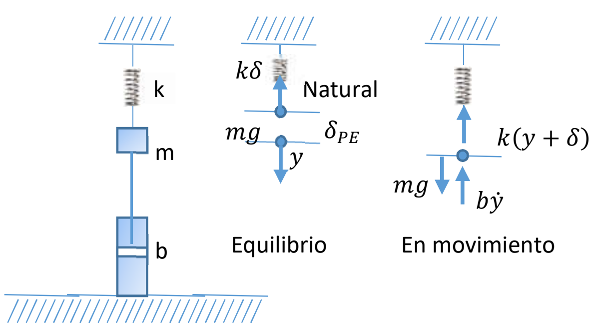


Figura 3

Un bloque de masa m está acoplado a un resorte suspendido de constante elástica k. El sistema se mueve dentro de un fluído viscoso, cuyo coeficiente de amortiguamiento es b. Inicialmente, el sistema oscila con amplitud $120\,mm$ y se observa que luego de 2.4 minutos, la amplitud del movimiento es $60\,mm$. Determine:



Del D.C.L.:

En la posición de equilibrio:

$$F_y = 0 \quad \rightarrow \quad mg - k\delta = 0$$

En movimiento:

$$F_y = ma_y$$

$$mg - k(y+\delta) - b\dot{y} = m\ddot{y}$$
$$mg - k\delta = 0$$
$$-ky - b\dot{y} = m\ddot{y}$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$ Ec. Diferencial del MAA

$$\frac{b}{m} = 2\gamma \quad \frac{k}{m} = {\omega_0}^2$$

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + {\omega_0}^2 y = 0$$

Solución de la ecuación diferencial: $y = y_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega_0 t + \phi)$

a) El valor de – $b/2m$

Después que han transcurrido nT:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{y_0 e^{-\gamma t}}{y_0 e^{-\gamma(t+nT)}} = e^{n\gamma t}$$

$$\ln\frac{A_1}{A_2} = n\gamma T = nT\frac{b}{2m}$$

En el tiempo $t = 0\ s$, $A_1 = 0.12\ m$ y en el tiempo $t = 144\ s$, $A_2 = 0.06\ m$:

$$\ln 2 = nT\frac{b}{2m} = 0.693$$
$$-\frac{b}{2m} = \frac{0.693}{144} = -0.0048\ s^{-1}$$

b) El tiempo que ha transcurrido hasta que la amplitud del movimiento es $30\ mm$.

$$\ln 4 = 0.0048 * nT = 1.38$$
$$t = \frac{1.38}{0.0048} = 288.8\ s = 4.8\ min$$

c) Si la masa del bloque es $100\ g$ y la constante elástica del resorte es $60\ N/m$, determine la frecuencia natural de oscilación del sistema.

$$\omega_0 = \sqrt{{}^{k}/_{m}} = \sqrt{{}^{60}/_{0.1}} = \sqrt{600} = 24.5\ {}^{rad}/_{s}$$
$${\omega_0}^2 = (24.5)^2 = 600\ s^{-2}$$

$$\gamma^2 = (-0.0048)^2 = 2.3 * 10^{-5}\ s^{-2}$$

Por lo tanto:

$$\omega_0{}^2 > \gamma^2 \quad \rightarrow \quad vibra\,u\,oscila$$

Para que el sistema no tenga un sobreamortiguamiento o un amortiguamiento crítico, se debe cumplir la siguiente relación: $\omega_0{}^2 > (\frac{b}{2m})^2$, donde ω_0 es la frecuencia natural de oscilación

d) A partir de los resultados obtenidos en los ítems anteriores, verifique si se cumple la condición de oscilación del sistema.

$$\omega_0{}^2 \gg \gamma^2 \quad \rightarrow \quad \text{el sistema realiza un MAA}$$

e) Halle el porcentaje de pérdida de energía mecánica cuando han transcurrido $10\,s$ del movimiento.

Para $\quad t = 0\,s \quad\quad t = 10\,s$:

$$E(t=0) = \frac{1}{2}kA_1^2 \qquad E(t=10) = \frac{1}{2}kA_2^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} * k * \left(A_1{}^2 - A_2{}^2\right)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{n\gamma T}$$

$$\Delta E = E_0 - E_1$$

$$E_0 = \frac{1}{2} * k * A_0{}^2 = 0.43\,J$$

$$E_1 = \frac{1}{2} * k * A_1{}^2 = 0.42\,J$$

$$\Delta E(\%) = \left(\frac{0.43 - 0.42}{0.43}\right) * 100 = 2.3\,\%$$

Pregunta 5: (5 puntos)

Dos altavoces están separados $3.00\,m$ como se muestra en la figura 4. Estos emiten sonidos en fase de $494\,Hz$. Se coloca un micrófono a $3.20\,m$ de distancia en un punto a la mitad entre ambos altavoces, donde se registra un máximo de intensidad.

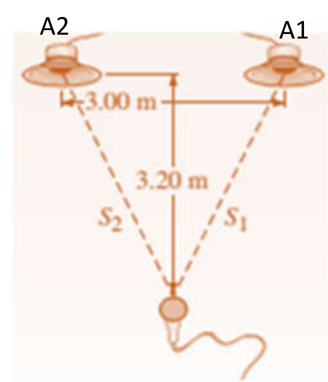


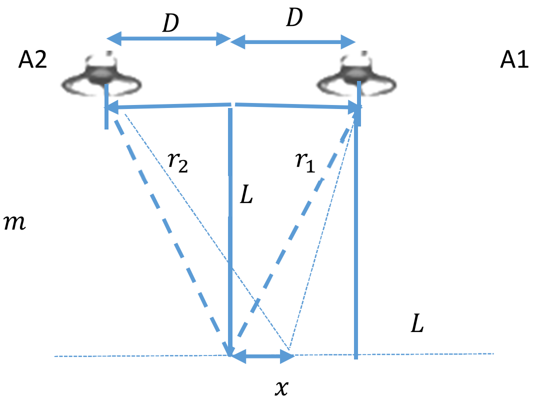
Figura 4

a) ¿Qué tan lejos debe moverse el micrófono hacia la derecha para encontrar el primer mínimo de intensidad?

$L = 3.2\ m$

$D = 3.0\ m$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343}{494} = 0.694\ m$$



Primer mínimo ocurre una distancia x:

$$r_1 = \sqrt{L^2 + (D - x)^2} \quad r_2 = \sqrt{L^2 + (D + x)^2}$$

Condición de interferencia destructiva:

$$|S_1 - S_2| = \frac{(2n + 1)}{2}\lambda$$

Para el primer mínimo:

$$|S_1 - S_2| = \tfrac{1}{2}\lambda = 0.347\ m \qquad \text{Eq 4.1}$$

Entonces:

$$\sqrt{L^2 + (D + x)^2} - \sqrt{L^2 + (D - x)^2} = \frac{1}{2}\lambda$$
$$\sqrt{L^2 + (D + x)^2} = \sqrt{L^2 + (D - x)^2} + \frac{1}{2}\lambda$$

$$L^2 + (D + x)^2 = 0.25\lambda^2 + \lambda\sqrt{L^2 + (D - x)^2} + L^2 + (D - x)^2$$
$$4Dx = 0.25\lambda^2 + \lambda\sqrt{L^2 + (D - x)^2}$$

$$16D^2x^2 - 2Dx\lambda^2 + 0.0625\lambda^4 = \lambda^2(L^2 + (D - x)^2)^2$$
$$16D^2x^2 - 2Dx\lambda^2 + 0.0625\lambda^4 = \lambda^2L^2 + \lambda^2D^2 - 2Dx\lambda^2 + \lambda^2x^2$$
$$(16D^2 - \lambda^2)x^2 = \lambda^2L^2 + \lambda^2D^2 - 0.0625\lambda^4$$

$$x = \sqrt{\frac{\lambda^2(L^2 + D^2 - 0.0625\lambda^2)}{(16D^2 - \lambda^2)}}$$
$$x = \sqrt{\frac{(0.694)^2((3.2)^2 + (1.5)^2 - 0.0625(0.694)^2)}{(16(1.5)^2 - (0.694)^2)}} = 0.41\ m$$

b) Suponga que los altavoces se vuelven a conectar de manera que los sonidos de $494\ Hz$ que emiten queden exactamente fuera de fase ¿En qué posiciones están el máximo y mínimo de intensidad?

Cuando los altavoces están fuera de fase, exactamente, las posiciones de los máximos se intercambian, es decir:

$$y_1(x_1,t) = A_0\cos(kx_1 - \omega t) \quad y_2(x_2,t) = A_0\cos(kx_2 - \omega t + \phi)$$

$$y'(x,t) = y_1(x_1,t) + y_2(x_2,t) = \left[2A_0\cos\left(\frac{k(x_1 - x_2) - \phi}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{k(x_1 + x_2) + \phi}{2} - \omega t\right)$$

Cuando ambas ondas interfieren constructivamente:

$$\frac{k(x_1 - x_2) - \phi}{2} = n\pi \qquad n = 0,1,2,\dots$$

$$\frac{k(x_1 - x_2)}{2} = n\pi + \frac{\phi}{2}$$

$$(x_1 - x_2) = \left(n + \frac{\phi}{2\pi}\right)\lambda$$

El p`rimer máximo: $n = 0$, cuando están exactamente fuera de fase $\phi = \pi$.

$$x_1 - x_2 = 0.5\lambda$$

$$\sqrt{L^2 + (D+x)^2} - \sqrt{L^2 + (D-x)^2} = \frac{1}{2}\lambda$$

Es la misma ecuación del primer ítem (a).

$$x = 0.41\ m$$

La condición para el primer mínimo:

$$\cos\left(\frac{k(x_1 - x_2) - \phi}{2}\right) = 0$$

Donde

$$\phi = \pi$$

Para que se cumpla la condición, los valores de $x_1\ y\ x_2$ deben ser iguales, por lo tanto, el primer mínimo se cumple en el punto medio.