UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
Facultad de Ingeniería Ambiental
Escuela Profesional de Ingenierìa de Higiene y Seguridad Industrial
Periodo Acadèmico 2017 - I

MATEMÁTICAS ACTUARIALES
EXAMEN PARCIAL

Profesor(es) : VILLAFUERTE ARIZA ARNOLD
Día y hora : 09 de mayo del 2017 - 19:00 – 21:00
Indicaciones : Solo está permitido el uso de calculadoras. Está prohibido el préstamo de calculadoras.

---

1. Se debe elaborar una tabla de mortalidad con los valores de lx, qx, dx y px (EN ESE ORDEN), para lo cual se debe hallar previamente lo siguiente:
   a) De las siguientes funciones, determinar cuál o cuáles están bien definidas en el campo de las matemáticas actuariales. Sustentar su respuesta.
   $S(x) = \mathbf{0.5}\, e^{-Ax/2}$, $x \geq 0$, $A > 0$
   $S(x) = \left(\frac{100-x}{100}\right)^A$. $0 \leq x \leq 100$, $A > 0$
   $F(x) = 1 - \frac{\sqrt{100A^2 - Ax}}{10A}$, $0 \leq x \leq 100$, $A > 0$

   b) De lo anterior, escoger una de las funciones que están bien definidas y calcular:
   $\boldsymbol{F(x)}$
   $S(\boldsymbol{x})$
   μ_x

   c) Con la función escogida, es necesario conocer el valor de "A". Calcule dicho valor, considerando que su probabilidad de supervivencia ${}_{10}p_{10}$ es la misma de otra función cuyo tanto instantáneo de mortalidad es:
   $$\mu_x = \frac{1}{100-x} + \frac{1}{120-x} \quad para \quad 0 \leq x \leq 100$$

   d) De lo anterior, es necesario duplicar el valor de "A", con lo cual se obtiene un A'=2A. Considerando este nuevo valor, reemplazarlo en la función escogida previamente y construir una única tabla de mortalidad (considerar $l_0 = 1000$) para las edades:
   - $0 \leq x \leq 5$
   - x=18, x=25, x=27, x=28, x=35 y x=50.

   e) Sin usar alguna de las fórmulas indicadas y solo conociendo los valores de l_{25}, l_{28}, q_{25}, p_{27} de la tabla de mortalidad anterior, hallar el valor de q_{26}. Sustentar su respuesta.

   f) Escriba el enunciado para las expresiones de:
   - ${}_{18}p_0$
   - ${}_{15}p_{35}$
   - ${}_{2/8}p_{25}$

   Luego, calcular su valor numérico partiendo de la tabla de mortalidad anterior.

   g) Calcule $\mathring{e}_{35}$.
   h) Se desea obtener la derivada de $\mathring{e}_x$ respecto a "x", en una expresión que contenga solo los valores de $\mathring{e}_x$ y u_x Obtener la fórmula correspondiente.

Solucionario del examen parcial:

a) Tenemos 3 funciones, se debe determinar si están definidas según la premisa inicial:

   a. $S(0)=1/2$, con lo cual no cumple $S(0)=1$, por lo tanto no está definida.
   b. $S(0)=1$, $S(100)=0$, es función monótona y decreciente, por lo tanto SÍ está definida. Adicionalmente, se deberá graficar la función o sustentar por definición de funciones.
   c. $S(0)=1$, $S(100)$ toma diferentes valores, con lo cual no siempre $S(100)=0$, por lo tanto no está definida.

b) Se debe escoger la única función definida:

$\boldsymbol{S(x)} = \left(\frac{\mathbf{100-x}}{\mathbf{100}}\right)^{\boldsymbol{A}}$. $0 \leq x \leq 100$, $A > 0$, con lo cual:

$F(x) = 1-\left(\frac{100-x}{100}\right)^{A}$ $\qquad$ $S(x) = \left(\frac{100-x}{100}\right)^{A}$ $\qquad$ $\mu_x = -\frac{S(x)}{S'(x)} = \left(\frac{A}{100-x}\right)$

c) $\mu_x = -\frac{S(x)}{S'(x)} = -\frac{d\,(Ln\,S(x))}{dx} = \frac{1}{100-x} + \frac{1}{120-x}$

Integrando, se tiene:

$Ln\,S(x) = Ln\,(100-x) + Ln\,(120-x) + Ln\,K$, con lo que $S(x) = K(100-x)(120-x)$

Ahora, se deben igualar los ${}_{10}p_{10}$ de cada función:

${}_{10}p_{10} = \frac{S(20)}{S(10)} = \left(\frac{0{,}80}{0{,}90}\right)^{A} = \frac{K.80.100}{K.90.110}$, de donde A=1.809 (se considera A=1.81 ó 1.8)

d) Ahora considerando A'=3.618 y $l_0 = 1000$. se obtiene la tabla de mortalidad según lo solicitado:

x	lx	qx	dx	px
0	1000.00	0.0357	35.7	0.9643
1	964.29	0.0361	34.8	0.9639
2	929.51	0.0364	33.9	0.9636
3	895.64	0.0368	33.0	0.9632
4	862.68	0.0372	32.1	0.9628
5	830.61	0.0376	31.2	0.9624
18	487.69	0.0434	21.2	0.9566
25	353.12	0.0474	16.7	0.9526
27	320.22	0.0487	15.6	0.9513
28	304.63	0.0493	15.0	0.9507
35	210.40	0.0546	11.5	0.9454
50	81.42	0.0705	5.7	0.9295

e) Como se conoce l_{25}, l_{28}, q_{25}, p_{27}, se obtiene (en ese orden):

$p_{27} = \frac{l28}{l27}$, con lo cual $l_{27}=320.22$

$q_{25} = 1-\frac{l26}{l25}$, con lo cual $l_{26}=336.38$

Por lo tanto, $q_{26} = 1-\frac{l27}{l26} = 1-0.952 = 0.048$

f) Se coloca primero el enunciado y luego el valor numérico se saca directamente de la tabla de mortalidad elaborada:

${}_{18}p_0$ es la probabilidad de que un individuo recién nacido sobreviva 18 años

${}_{18}p_0 = \frac{l18}{l0} = 0.488$

${}_{15}p_{35}$ es la probabilidad de que un individuo, teniendo 35 años, sobreviva 15 años

${}_{15}p_{35} = \frac{l50}{l35} = 0.387$

${}_{2/8}p_{25}$ es la probabilidad de que un individuo, teniendo 25 años, sobreviva 2 años y fallezca dentro de los 8 años siguientes

${}_{2/8}p_{25} = \frac{l27 - l35}{l25} = 0.311$

g) Se procede a desarrollar la integral:

$\dot{e}_{35} = \int_0^{65} \mathrm{tP35}\, dt$

$\dot{e}_{35} = \int_0^{65} \frac{S(35+t)}{S(35)} dt$

$\dot{e}_{35} = \int_0^{65} \frac{\left(\frac{65-t}{100}\right)^A}{\left(\frac{65}{100}\right)^A} dt = \int_0^{65} \left(1 - \frac{t}{65}\right)^A dt = -65 \int_0^{65} \left(1 - \frac{t}{65}\right)^A d\left(1 - \frac{t}{65}\right)$

$\dot{e}_{35} = \frac{-65}{A+1} \left(1 - \frac{t}{65}\right)^{A+1} \Big]_0^{65} \Big] = 0 - \left(\frac{-65}{A+1}\right) = \frac{65}{A+1}$

Para A=3.62:

$\dot{e}_{35} = 14.07$

h) Se pide demostrar $\frac{d\dot{e}_x}{dx}$ en función de $\dot{e}_x$ y u_x , con lo cual se pasa a derivar (considerando que *S(ω)=0 y* ${}_t p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)}$):

$$\frac{d\dot{e}_x}{dx} = \frac{d\left(\int_0^{\omega - x} \frac{S(x+t)}{S(x)} dt\right)}{dx} = \int_0^{\omega - x} \frac{d\frac{S(x+t)}{S(x)}}{dx} dt$$

$$\frac{d\dot{e}_x}{dx} = \int_0^{\omega - x} \left(\frac{S'(x+t)}{S(x)} - \frac{S(x+t).S'(x)}{S^2(x)}\right) dt$$

$$\frac{d\dot{e}_x}{dx} = \frac{S(x+t)}{S(x)} \Big]_0^{\omega - x} \Big] - \frac{S'(x)}{S(x)} \left(\int_0^{\omega - x} \frac{S(x+t)}{S(x)} dt\right)$$

$$\frac{d\dot{e}_x}{dx} = \left(\frac{S(\omega) - S(x)}{S(x)}\right) - \frac{S'(x)}{S(x)} (\dot{e}_x) = -1 + u_x (\dot{e}_x)$$

$$\frac{d\dot{e}_x}{dx} = \dot{e}_x\, u_x - 1$$