UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA AMBIENTAL

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS Y ESTUDIOS Y ESTUDIOS ESPECÍFICOS BÁSICOS

PERIODO ACADÉMICO 2019-1

AA232 – BIOESTADÍSTICA

SOLUCIONARIO - EXAMEN FINAL

Profesoras : CASTAÑEDA SALDAÑA Beatriz, ARANA LOPEZ Sara
Día y hora : 03 de julio del 2019 - 11:00am – 13:00pm
Indicaciones : Sin copias ni apuntes. Prohibido el préstamo de calculadoras y el uso de Celulares.

---

1. Una máquina fabrica tornillos cuyas longitudes se distribuyen normalmente con media 20 mm y varianza 0.25 mm². Un tornillo se considera defectuoso si su longitud difiere de la media más de 1 mm.
   a) Calcule el porcentaje de tornillos defectuosos que produce la máquina. **2p**

Solución

Sea X: Longitud de los tornillos,
X es Normal con $\mu = 20$ mm y $\sigma^2 = 0.25$ mm² $\sigma = 0.5$
Tornillo defectuoso si $X < 19$ o $X > 21$

P(Tornillo defectuoso) = $P(X < 19) + P(X > 21) = P(Z < -2) + P(Z > 2) = 2(0.023) = 0.046$

De acuerdo a los parámetros de la producción se espera **4.6% tornillos defectuosos**

b) Si se toma una muestra de 120 tornillos y en ella se encuentra que $\bar{x} = 19.9\,mm;\ S = 0.45\ mm$ y 10 son defectuosos

Analice si estos datos son evidencia de que:

b1) El reporte de una media de 20 mm es una sobreestimación de la longitud promedio de los tornillos al nivel α del 5%. **2p**

Solución

De acuerdo a lo expresado realizamos una prueba de hipótesis para la media

Ho: $\mu = 20$ mm
H_1: $\mu < 20$ mm (en este caso si se reporta $\mu = 20$ mm se sobreestima la longitud promedio)

Dado que la muestra n = 120 (muestra grande) aplicamos la prueba Z con $\sigma = 0.5$ mm

$$Z = \frac{19.9 - 20}{0.5/\sqrt{120}} = -2.19$$ p_value = P(Z < -2.19)= 0.014 < 0.05

Por otro lado para el criterio $\alpha = 0.05$, la región de rechazo es para $Z < -1.645$

Por lo cual se decide rechazar Ho a favor de H1, es decir la muestra es evidencia de que el reporte de la media 20 mm es una sobreestimación de la longitud promedio de los tornillos
(También es válido hacer el análisis con la S= 0.45mm obtenido con la muestra)

b2) El porcentaje de defectuosos supera a lo esperado. Proporcione el nivel crítico o p-value. Interprete. **2p**

Solución

Según el resultado en a) se espera que la producción tenga 4,6% de defectuosos
En este caso aplicaremos una prueba de hipótesis para la proporción de defectuosos (P)

Ho: P = 0.046 H_1: P > 0.046

Con los datos de la muestra obtenemos **p = 10/120 = 0.0833**
Por ser muestra grande de una producción de tornillos supuestamente grande, aplicamos la prueba Z para la proporción

$$Z = \frac{0.0833 - 0.046}{\sqrt{0.046(0.954)/120}} = 1.93$$ p_value = P(Z > 1.93) = 0.027 < 0.05

El p_value nos indica que el porcentaje de defectuosos encontrado en la muestra es significativamente mayor que el porcentaje esperado según el reporte, por lo cual concluimos que la muestra es evidencia de que el porcentaje de defectuosos supera lo esperado.

2. Sea X la v.a. "Tiempo utilizado para realizar una actividad" cuya función de densidad es exponencial con media 40 minutos
   a) Calcular la probabilidad de que el tiempo empleado sea superior a una hora y media.**1p**

Solución

Si X es exponencial con media μ = 40 minutos, entonces λ = 1/40

P(X > 90 minutos) = $\int_{90}^{\infty} 1/40\, e^{-x/40} dx = -e^{-90/40} = 0.105$

   b) Si se selecciona una muestra de 45 personas que realizan la actividad. Calcular
      b1) La probabilidad de que exactamente dos realicen la actividad en más de 1,5 horas. **2p**

Solución

Sea Y: número de personas en la muestra, que realizan la actividad en más de 1,5 horas entonces Y es binomial n = 45 P = 0.105

P(Y=2) = $C_2^{45} 0.105^2 0.895^{43} = 0.0925$

b2) La probabilidad de que el tiempo promedio que utilizan las personas en la muestra supere los 50 minutos. **2p**

Solución

Se pide la $P(\bar{X} > 50 minutos)$

Para ello tenemos en cuenta que la muestra es grande n = 45 > 30, por lo cual

$$\bar{X}\ es \approx Normal\ \ con\ \mu_{\bar{x}} = 40\ \ y\ \ \sigma_{\bar{x}} = 40/\sqrt{45}$$

$$P(\bar{X} > 50 minutos) = P(Z > \frac{50-40}{40/\sqrt{45}}) = P(Z > 1.68) = 0.046$$

3. Una compañía evalúa una propuesta para fusionarse con una corporación. El consejo de directores desea muestrear la opinión de los accionistas para determinar si esta es independiente del número de acciones que posee cada uno. Una muestra aleatoria de 250 accionistas da los siguientes resultados:

Número de Acciones	**Opinión**			**Totales**
	A Favor	En Contra	Indecisos	
Menos de 100	40	30	6	76
100 - 1500	25	40	10	75
Más de 1500	35	60	4	99
Totales	100	130	20	250

Con base en esta información, ¿existe alguna razón para dudar de que la opinión con respecto a la propuesta es independiente del número de acciones que posee el accionista? Use α =0,01. Formule las hipótesis aplicadas al contexto (**1p**), realice la prueba (**2p**) y exprese su conclusión aplicada al contexto (**1p**).

Solución

Ho: La opinión de los accionistas es independiente del número de acciones que posee
H1: La opinión de los accionistas está relacionada con el número de acciones que posee

Aplicamos la prueba Chi-Cuadrado de independencia para lo cual calculamos las frecuencias esperadas y el estadístico X^2

Frecuencias esperadas

Número de Acciones	**Opinión**			**Totales**
	A Favor	En Contra	Indecisos	
Menos de 100	30.4	39.52	6.08	76
100 - 1500	30	39	6	75
Más de 1500	39.6	51.48	7.92	99
Totales	100	130	20	250

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{n_{ij}^2}{E_{ij}} - n = 262.74 - 250 = 12.74$$

$$p\_value = P(\chi^2_{(4)} > 12.74) = 0.0126 > 0.01 = \alpha$$

Encontramos que hay diferencia significativa (p<0.05) pero esta no alcanza el nivel de significancia α=0.01 establecido para la toma de decisión. Por ello al nivel del 1% de significancia concluimos que no hay evidencia suficiente para dudar que la opinión de los accionistas respecto de la propuesta de fusión sea independiente del número de acciones.

4. El Congreso de un país ha propuesto una Ley para la aplicación de la pena de muerte a los culpables de asesinato, para averiguar si hay diferencia en la opinión de varones y mujeres respecto de la promulgación de esta ley, se seleccionó una muestra de 320 varones y 250 mujeres de las cuales 48 varones y 50 mujeres manifestaron estar a favor de la promulgación de esta ley.

a) Formule las hipótesis y realice la prueba correspondiente. Justifique su conclusión, proporcionando la significancia p. **2p**

Solución

Ho: No hay diferencia, entre varones y mujeres, respecto de la opinión a favor de la aplicación de la pena de muerte para los culpables de asesinato $P_1=P_2$

Ho: Hay diferencia, entre varones y mujeres, respecto de la opinión a favor de la aplicación de la pena de muerte para los culpables de asesinato $P_1 \neq P_2$

Para este análisis aplicaremos la prueba Z para comparación de dos proporciones
De las muestras obtenemos
$p_1 = 48/320= 0.15$ $p_2= 50/250= 0.20$ $p = 90/570= 0.172$

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{P(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.15-0.20}{\sqrt{0.172(0.828)(1/320+1/250)}} = -1.57$$

Por ser una hipótesis alterna bilateral, calculamos p_value = 2 P(Z<-1.57) = 2(0.058)=0.116

Con este resultado concluimos que las diferencias encontradas en los porcentajes a favor de la pena de muerte en hombres y mujeres no es significativa (p> 0.05)

b) Obtenga la estimación intervalica con 95% de confianza para la diferencia entre los porcentajes a favor de la pena de muerte de varones y mujeres. Interprete su resultado (en el contexto). **2p**

Solución

Para obtener la estimación interválica con 95% de confianza para la diferencia de proporciones calculamos

$$L = (p_1 - p_2) \pm Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

$$L = (0.15-0.20) \pm 1.96\sqrt{\frac{0.15(0.85)}{320}+\frac{0.20(0.80)}{250}} = -0.05 \pm 0.063$$

Li = - 0.113 Ls= 0.013

Con 95% de confianza estimamos que la diferencia de porcentajes a favor de la pena de muerte está entre -11.3% a 1.3%, resultado que incluye al cero con lo cual existe la posibilidad de que los porcentajes sean iguales por ello concluimos que la diferencia entre las opiniones no es significativa

c) Con la muestra reunida estime el porcentaje de la población a favor de la pena de muerte (sin distinción de sexo). Proporcione el error de estimación con 95% de confianza. **1p**

Solución

Con los resultados de la muestra reunida calculamos p = 90/570 = 0.172. Estimamos que 17.2% de la población está a favor de la promulgación de la ley, el error de esta estimación

es $E = Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96\sqrt{0.172(0.828)/570} = 0.031$ (3.1%)