UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA AMBIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS Y ESTUDIOS ESPECÍFICOS BÁSICOS

Curso	:	**CÁLCULO DIFERENCIAL**
Código del curso	:	BMA-01
Secciones	:	E – F – G – H
Docentes	:	Adriana Valverde Calderón Héctor Herrera Vega Javier Gonzalo Quinto Oscar Valverde Sandoval
Ciclo	:	I
Fecha	:	02/07/19
Periodo Académico	:	2019-1

SOLUCIONARIO EXAMEN FINAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Sea $s(t)$ la distancia de un camión a un cruce. En el instante $t = 0$, el camión que se encuentra a $60\, metros$ del cruce se desplaza a una velocidad de $24\, m/s$, y empieza a frenar con una aceleración de $-3\, m/s^2$.

   a) Determine el polinomio de Maclaurin de segundo orden de $s(t)$. **3 pts.**

   b) Use el resultado de a) para estimar la distancia del camión al cruce pasados $4\, s$. **1 pto.**

   Resolución

   a) Polinomio de Maclaurin de segundo orden de $s(t)$: $P(t) = \frac{s(0)}{0!} + \frac{s'(0)}{1!}\, t + \frac{s''(0)}{2!}\, t^2$

   Con los datos: $s(0) = 60$; $s'(0) = 24$; $s''(0) = -3$; el Polinomio de Maclaurin será:

$$P(t) = \frac{60}{0!} + \frac{24}{1!}\, t - \frac{3}{2!}\, t^2 = 60 + 24t - \frac{3}{2} t^2$$

   b) Estimación de la distancia del camión al cruce pasados $4\, s$

$$s(t) \approx P(4) = 60 + 24(4) - \frac{3}{2}(4^2) = 132$$

   La distancia del camión al cruce, pasados $4\, s$, es aproximadamente $132\, metros$

2. La función $f(x) = y$ es continua e impar sobre el intervalo $[a\,, b]$ y cumple lo siguiente:

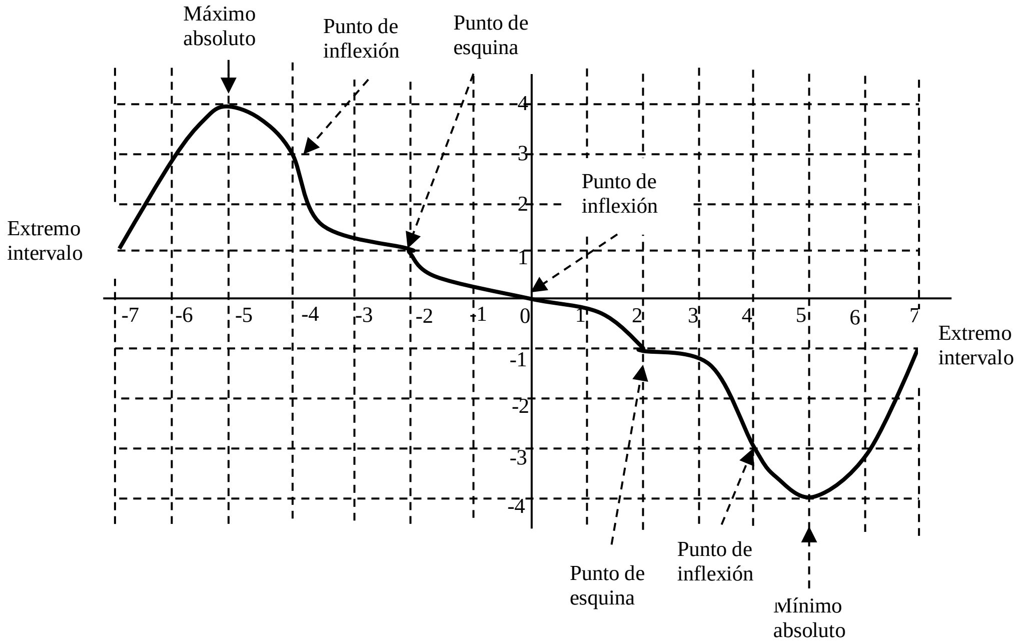
   - $f(x) \in [-4\,, 4]$;
   - $f(0) = 0$; $f(-7) = 1$; $f'(-5) = 0$; $f''(4) = 0$ y solo $f'(2)$ no existe.;
   - $f'(x) < 0, \forall x \in\,]-5\,, 5[$
   - $f''(x) = 0\ \forall\, x \in\,]6\,, 7[$; $f''(x) < 0\ \forall\, x \in\,]0\,, 4[$

   a) Grafique la función $f(x) = y$ a escala de la cuadrícula del cuadernillo de respuestas. **3 pts.**

   b) Sobre la gráfica indique todos los puntos críticos. **1 pto.**

Resolución

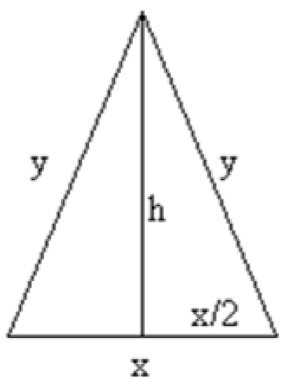
La gráfica es simétrica con respecto al origen de coordenadas porque la función es impar.



3. Calcular la longitud de la base y la longitud de la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima. **4 pts.**

Resolución

Consideremos el triángulo de la figura, entonces:



$$x+2y=8 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{8-x}{2} \qquad \ldots(1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$y^2=h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h=\sqrt{y^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \ldots\ldots(2)$$

De (1), el valor de $y=\dfrac{8-x}{2}$ lo reemplazamos en (2)

$$h=\sqrt{\left(\frac{8-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{64+x^2-16x-x^2}{4}}=\sqrt{16-4x}=2\sqrt{4-x}$$

El área de la región triangular es: $A(x)=\dfrac{xh}{2}=x\sqrt{4-x}, \quad 0<x<4$

Derivando: $A'(x)=\sqrt{4-x}-\dfrac{x}{2\sqrt{4-x}}=\dfrac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$, e igualando a cero se obtiene: $x=\dfrac{8}{3}$

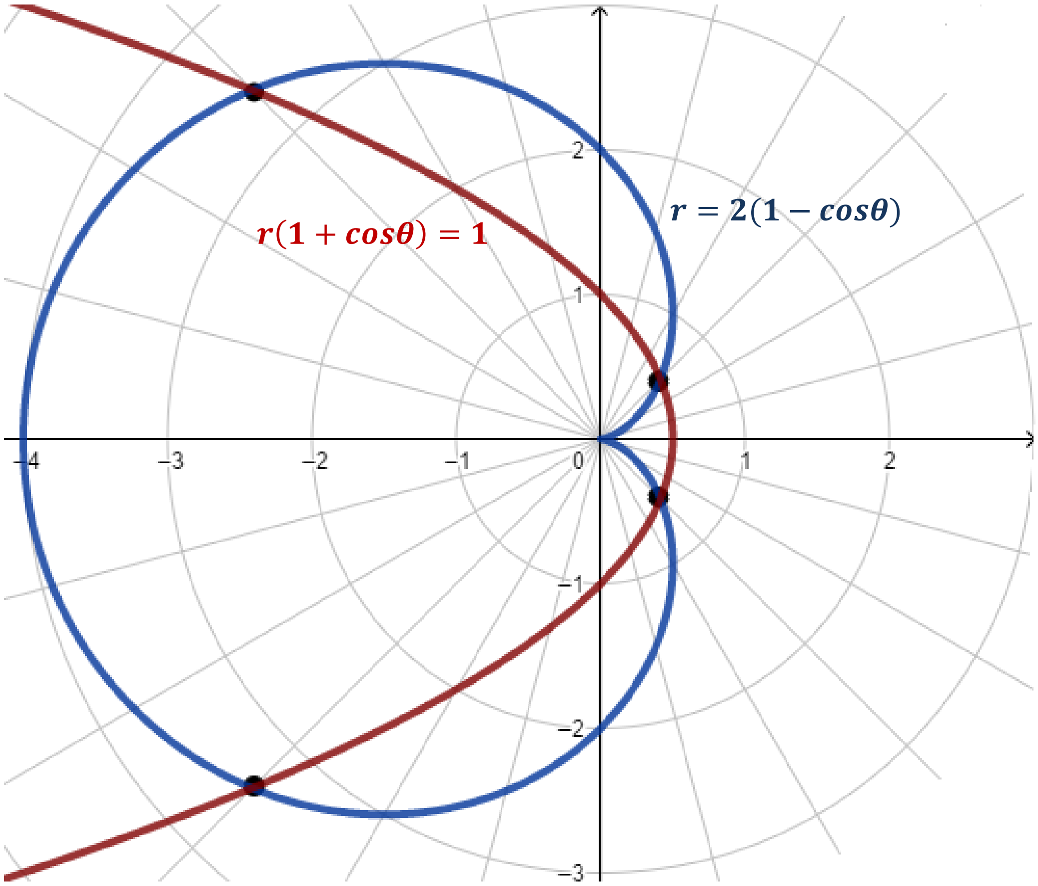
Luego, si $0<x<\dfrac{8}{3}$ entonces $A'(x)>0$ y Si $\dfrac{8}{3}<x<4$ entonces $A'(x)<0$

En conclusión, en $x=\dfrac{8}{3}$ hay un valor máximo relativo para el área del triángulo isósceles.

Respuestas. Base: $\dfrac{8}{3}$u y Altura: $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ u

4. Del siguiente par de curvas polares: $r = 2(1 - \cos\theta) \quad y \quad r(1 + \cos\theta) = 1$
Se pide:

a) Graficar las curvas polares. **2 pts.**



b) Hallar las coordenadas polares de todos los puntos de intersección. **2 pts.**

Reemplazando el r de la primera ecuación en la segunda, obtenemos:

$$2(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta) = 1 \quad \rightarrow \quad 2cos^2\theta - 1 = 0$$

$$\rightarrow \quad cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

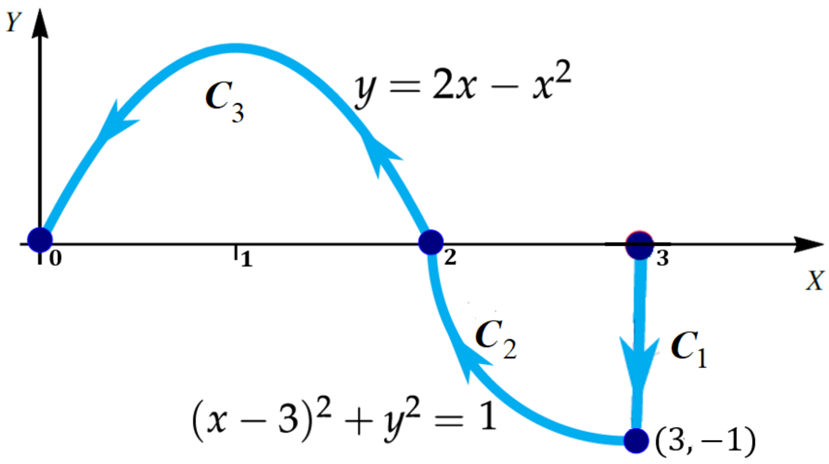
$$\rightarrow \quad \theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

Por lo tanto, las coordenadas de los puntos de intersección son:

$$\boldsymbol{P_1}\left(2 + \sqrt{2}\,;\, \frac{3\pi}{4}\right) \qquad \boldsymbol{P_2}\left(2 - \sqrt{2}\,;\, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{P_3}\left(2 - \sqrt{2}\,;\, \frac{7\pi}{4}\right) \qquad \boldsymbol{P_4}\left(2 + \sqrt{2}\,;\, \frac{5\pi}{4}\right)$$

5. Parametrizar la curva plana $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. **4 pts.**



Resolución:

- Parametrizando C_1: segmento de recta vertical

  Considerando la ecuación cartesiana y la orientación de la curva, una parametrización sería:

  $$C_1: \begin{cases} x = 3 \\ y = -t \end{cases} , \quad 0 \leq t \leq 1$$

- Parametrizando C_2: arco de circunferencia

  Considerando la ecuación cartesiana y la orientación de la curva, una parametrización sería:

  $$C_2: \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -\sqrt{2t - t^2} \end{cases} , \quad 1 \leq t \leq 2$$

- Parametrizando C_3: arco de parábola

  Considerando la ecuación cartesiana y la orientación de la curva, una parametrización sería:

  $$C_3: \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 1 - (t-3)^2 \end{cases} , \quad 2 \leq t \leq 4$$