UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA AMBIENTAL
AREA DE CIENCIAS BASICAS

SOLUCIONARIO: EXAMEN FINAL DE ÁLGERA LINEAL – BMA-03

1. Por una rotación de ejes coordenados en un ángulo de $45°$, una ecuación se transforma en $(x')^2 + 2(y')^2 = 3$. Determine la ecuación original desarrollada.

SOLUCIÓN:

<u>SISTEMA XY</u>	<u>TRANSFORMACIÓN</u>	<u>SISTEM X'Y'</u>
$P = (x\ ;\ y)$	$\theta = 45°$	$(x')^2 + 2(y')^2 = 3$

$$\vec{u} = (\cos(\theta);\operatorname{sen}(\theta)) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{u}^{\perp} = (-\operatorname{sen}(\theta);\cos(\theta)) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x' \;=\; (P-V)\cdot\vec{u} = P\cdot\vec{u} = (x;y)\cdot(\cos(\theta);\operatorname{sen}(\theta)) = (x;y)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

$$y' \;=\; (P-V)\cdot\vec{u}^{\perp} = P\cdot\vec{u}^{\perp} = (x;y)\cdot(-\operatorname{sen}(\theta);\cos(\theta)) = (x;y)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) == \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)$$

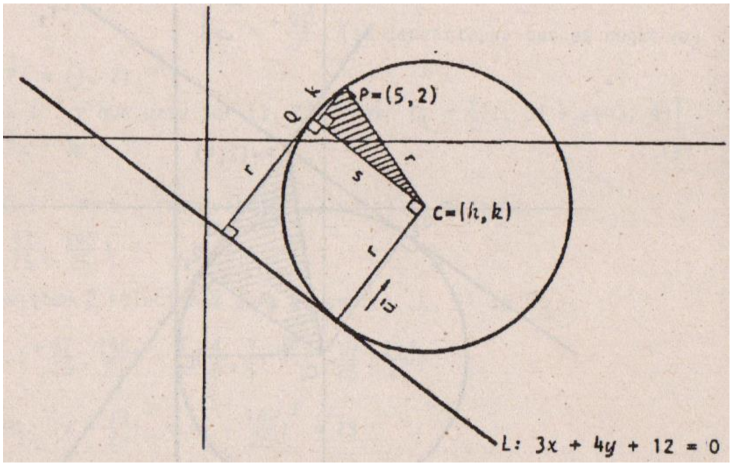
Como:

$$(x')^2 + 2(y')^2 = 3 \;\Rightarrow\; \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right]^2 + 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)\right]^2 = 3 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(x+y)^2 + (y-x)^2 = 3$$

$$\therefore\;\; 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 6 = 0$$

2. **La recta $L: 3x+4y+12=0$ es tangente a una circunferencia cuyo centro $C=(h\ ;\ k)$ se encuentra en el cuarto cuadrante. Si $P=(5\ ;\ 2)$ es un punto de la circunferencia tal que $\operatorname{Pr}oy_L \overrightarrow{PC} = (4\ ;-3)$, hallar la ecuación vectorial paramétrica de la circunferencia. Hacer su procedimiento en forma vectorial de lo contrario no es válido su solución.**

SOLUCIÓN:



Por dato: $\operatorname{Pr}oy_L\overrightarrow{PC}=(4\,;-3)\Rightarrow s=\|(4\,;-3)\|=5$ **y** $d(P\,;\,L)=\dfrac{|3(5)+4(2)+12|}{5}=7$**, ahora** $k=7-r$**. Luego por el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo sombreado:** $r^2=(7-r)^2+25\;\Rightarrow\; r=\dfrac{37}{7}\;\Rightarrow\; k=\dfrac{12}{7}$**.**

Hallando el centro de la circunferencia: $C=(h\,;\,k)$

$$\overrightarrow{QP}=k\vec{u}\;\Rightarrow\; Q=(5\,;\,2)-\frac{12}{7}\left(\frac{3}{5}\,;\,\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{139}{35}\,;\,\frac{22}{35}\right)$$

También: $\overrightarrow{CQ}=k\vec{u}^{\perp}\;\Rightarrow\; C=\left(\dfrac{139}{35}\,;\,\dfrac{22}{35}\right)-5\left(-\dfrac{4}{5}\,;\,\dfrac{3}{5}\right)=\left(\dfrac{279}{35}\,;-\dfrac{83}{35}\right)$

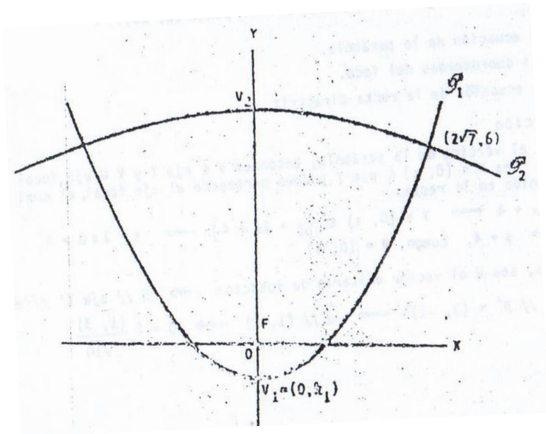
Determinamos la ecuación vectorial paramétrica de la circunferencia:

$$P=\left(\frac{279}{35}\,;-\frac{83}{35}\right)+\frac{37}{7}\big(\cos(\varphi)\,;\,sen(\varphi)\big),\;\varphi\in[0\,;\,2\pi]$$

3. Dos parábolas con eje focal vertical tienen su foco en el origen de coordenadas y pasan por el punto $Q=\left(2\sqrt{7}\,;\,6\right)$. Calcular la distancia entre los vértices.

SOLUCIÓN:

Observamos que, $P_1: x^2=4p(y-k_1)$, $p>0$ y $V_1=(0\,;\,k_1)$



También $d(V_1\,;\,F)=p\;\Rightarrow\; p=-k_1>0$.

Luego: $P_1: x^2=-4k_1(y-k_1)$

En forma similar: $P_2: x^2=-4k_2(y-k_2)$, $k_2>0$

Como: P_1 y P_2 son de la misma forma, trabajaremos con:

$$P: x^2=-4k(y-k),\;\text{donde } k=k_1<0\; y\; k=k_2>0$$

Por dato, $Q=\left(2\sqrt{7}\,;\,6\right)\in P$, entonces reemplazando en $x^2=-4k(y-k)$, obtenemos:

$$k=7\vee k=-1\text{, entonces } k=k_2=7 \text{ o } k=k_1=-1$$

De este manera: $V_1=(0\,;\,k_1)=(0\,;-1)$ y $V_2=(0\,;\,k_2)=(0\,;\,7)$. Por lo tanto $d(V_1\,;\,V_2)=8$

4. Sea H una hipérbola cuyas asíntotas son las rectas: $L_1 = \{(9\ ;\ 5) + t(1\ ;\ 0)/t \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \{24x + 7y = 131\}$. Una directriz de la hipérbola corta a la asíntota L_1 en un punto cuya abscisa es 7. Determine la ecuación vectorial de la hipérbola H.

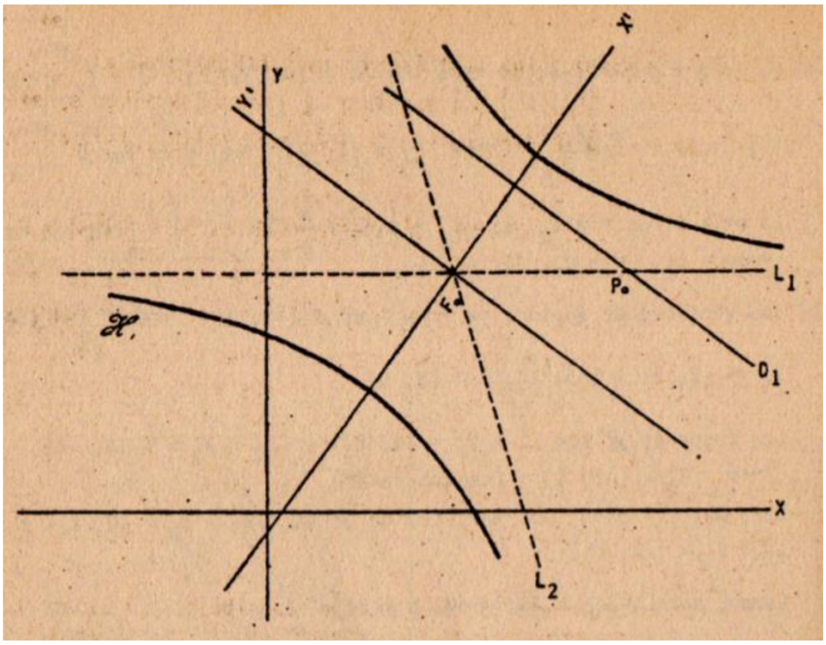
SOLUCIÓN:

Observe que $L_1 :\ y = 5$, entonces, $F_0 = L_1 \cap L_2 = (4\ ;\ 5)$ es el centro de la hipérbola H.
Sea D_1 la recta directriz de H que corta a L_1 en el punto $P_0 = (7\ ;\ y) \in L_1$, entonces como $y = 5 \ \Rightarrow\ P_0 = (7\ ;\ 5)$.

Para la dirección $\vec{u}$ del eje focal de H se presentan los casos siguientes:

a) $\vec{u} // \left[(1\ ;\ 0) + \left(\frac{7}{25}\ ;\ -\frac{24}{25}\right)\right] = \left(\frac{32}{25}\ ;\ -\frac{24}{25}\right) // (4\ ;\ -3) \ \Rightarrow\ \vec{u} = \left(\frac{4}{5}\ ;\ -\frac{3}{5}\right)$

b) $\vec{u} // \left[(1\ ;\ 0) - \left(\frac{7}{25}\ ;\ -\frac{24}{25}\right)\right] = \left(\frac{18}{25}\ ;\ \frac{24}{25}\right) // (3\ ;\ 4) \ \Rightarrow\ \vec{u} = \left(\frac{3}{5}\ ;\ \frac{4}{5}\right)$



Tomaremos el caso b)

La recta directriz $D_1 = \{(7\ ;\ 5) + r(4\ ;\ -3)/r \in \mathbb{R}\} \ \Rightarrow\ D_1 : 3x + 4y - 41 = 0$

Además: $d(F_0\ ;\ D_1) = d(F_0\ ;\ L_2) = \dfrac{|3(4) + 4(5) - 41|}{5} = \dfrac{9}{5} = \dfrac{a^2}{c}$..........(1)

Pasamos la asíntota $L_1 : y = 5$ al sistema $X'Y'$:

$$(x\,;\,y)=(4\,;\,5)+x'\left(\frac{3}{5}\,;\,\frac{4}{5}\right)+y'\left(-\frac{4}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right)\Rightarrow y=5+\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'$$

$$\Rightarrow\ L_1:\ 5+\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'=5\ \Rightarrow\ L_1:\ y'=-\frac{4}{3}x'\ \Rightarrow\ \frac{b}{a}=\frac{4}{3}..........(2)$$

De (2): $b^2=\frac{16}{9}a^2$. Usando (1): $b^2=\frac{16}{5}c..........(3)$

Pero, $a^2+b^2=c^2$. Usando (1): y (3): $\frac{9}{5}c+\frac{16}{5}c=c^2\ \Rightarrow\ c=5$

En (3): $b=4$, en (1): $a=3$. Por consiguiente para $\vec{u}=\left(\frac{3}{5}\,;\,\frac{4}{5}\right)$, resulta

$$H:\left\{P\Big/ P=(4\,;\,5)+x'\left(\frac{3}{5}\,;\,\frac{4}{5}\right)+y'\left(-\frac{4}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right),\ \text{donde}:\frac{(x')^2}{9}-\frac{(y')^2}{16}=1\right\}$$

Y para $\vec{u}=\left(\frac{4}{5}\,;\,-\frac{3}{5}\right)$, resulta:

$$H:\left\{P\Big/ P=(4\,;\,5)+x'\left(\frac{4}{5}\,;\,-\frac{3}{5}\right)+y'\left(\frac{3}{5}\,;\,\frac{4}{5}\right),\ \text{donde}:\frac{(x')^2}{9}-\frac{(y')^2}{\frac{31}{16}}=1\right\}$$