CALCULO DE MÚLTIPLES VARIABLES
SOLUCIONARIO EXAMEN FINAL 2019 1

DOCENTES: Ing. Mg. Hugo Morales, Lic. Mg. César Cabrera Mg. Alexander Bonifacio

FACULTAD	FACULTAD DE AMBIENTAL					
ÁREA	DE CIENCIAS BÁSICAS					
Periodo Lectivo	2019 I	**Aula**		**Curso**		**Sección**	TODAS
Fecha de evaluación	04/07/2019		**Horario**		4:00 a 6:00		

1. Sea el sólido *E* que esta interior a la esfera $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 16$, fuera del semicono $S_2: z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}$ y encima del plano $S_3: z = 0$

a. Graficar dicho sólido *E* y descríbalo en coordenadas esféricas.

Si $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Longrightarrow \rho = 4$

$S_2: z = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3} \Longrightarrow \emptyset = \dfrac{\pi}{3}$

Descripción del sólido *E* es:

$$E = \{(\rho, \emptyset, \theta) \ / \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ ; \ \frac{\pi}{3} \leq \emptyset \leq \frac{\pi}{2} \ ; \ 0 \leq \rho \leq 4 \}$$

b. Plantee y calcule el volumen del sólido usando integrales triples.

$$V(E) = \iiint 1 \, dv$$

$$V(E) = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^4 1\rho^2 \, sen\emptyset d\rho d\emptyset d\theta$$

$$V(E) = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{64}{3} sen\emptyset d\emptyset d\theta = \frac{64}{3}\pi$$

El volumen del sólido *E* es de 67,02u^3aproximadamente.

2. Si $\bar{F}(x, y, z) = ycosx\hat{\imath} + \frac{1}{2}y^2senx\hat{\jmath} + z\hat{k}$, determine la integral:

$$\iint_S \bar{F}nds$$

donde *S* es la frontera del solido *Q* comprendido entre las superficies:

$$z = 1 + y \ ; \ x^2 + y^2 = 1 \ ; Z = 0$$

y $\vec{n}$ es el vector normal unitario siempre exterior a *Q*.

RESOLUCIÓN:

Mediante el teorema de la divergencia, la proyección del sólido sobre el plano *XY* es un círculo:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$Div\, \bar{F} = -ysenx + ysenx + 1 = 1$

$$\iint_S \bar{F} n ds = \iiint_Q Div \bar{F} dV = \iint_D \int_0^{1+y} 1 \cdot rdzdA$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1+rsen\theta} r\, dzdrd\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + rcos\theta)\, rdrd\theta = \pi$$

3. Determinar los valores extremos de la función:

$$z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

sobre la curva C: $x^2 + y^2 = 1$ e interprete geométricamente.

RESOLUCIÓN:

$S_1: f(x, y) = x^2 + 2y^2$, función a analizar
$S_2: g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, condición

Empleando Lagrange:

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 2x = \lambda 2x \cdots (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 4y = \lambda 2y \cdots (2)$$

$x^2 + y^2 = 1 \cdots (3)$

Resolviendo el sistema los puntos críticos son:

$$\{(0,1); (0, -1); (1,0); (-1,0)\}$$

$$f(0,1) = 2\ ;\ f(0, -1) = 2; f(1,0) = 1; f(-1,0) = 1$$

Máximo absoluto en $f(0, \pm 1) = 2$

Mínimo absoluto en $f(\pm 1, 0) = 1$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

$$C: x^2 + y^2 = 1$$
$$C_1: x^2 + 2y^2 = 1 \cdots Elipse$$
$$C_2: x^2 + 2y^2 = 2 \cdots Elipse$$

4. Evaluar:

$$\iint_S Rot\,\bar{F}dr$$

donde $\bar{F}(x,y,z) = (-y^2, x,\ z^2)$ y $S: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

<u>RESOLUCIÓN</u>:

Sea la superficie $S: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$$Rot\,F = \nabla \times F = (0, 0, 1 + 2y)$$

$$S = \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

$$\bar{J}(x,y) = \nabla F(x,y,z) = \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1\right)$$

$$\iint_S Rot\,\bar{F}dr = \iint_S (0, 0, 1 + 2y) \cdot \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1\right) dA$$

$$\iint_S Rot\,\bar{F}dr = \iint_S (1 + 2y)\,dA = \int_0^2 \int_0^\pi (1 + 2r\operatorname{sen}\theta) r dr d\theta$$

LOS PROFESORES DEL CURSO