SOLUCIONARIO EXAMEN FINAL DE FÍSICA III 2019-1

Pregunta 1: (5 puntos)

El circuito mostrado en la figura 1 está formado por dos resistencias R_1 y R_2 y un condensador de capacitancia C. El circuito está conectado a una batería de corriente directa cuya fuerza electromotriz es $\mathcal{E}$

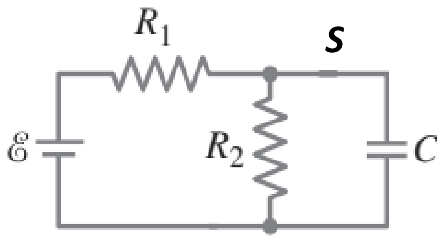


Figura 1

La llave S se cierra en el instante t = 0s y el condensador está descargado. Se pide calcular:

(a) La carga que almacena el condensador al cabo de un tiempo t

(b) La carga que almacena el condensador luego de un tiempo muy largo

(c) Determine la constante de tiempo en este circuito RC

(d) ¿Cuál es la corriente que pasa por el condensador

(e) ¿Cuál es la corriente que pasa por la resistencia R_1?

(f) ¿Cuál es la corriente que pasa por la resistencia R_2?

Solución

(a) La carga que almacena el condensador al cabo de un tiempo t

En el circuito de la figura 1a, identificamos las corrientes I1, I2 y I3, que pasan por las resistencias R1, R2 y el condensador, respectivamente.

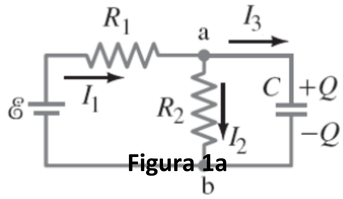


Figura 1a

Aplicando las leyes de Kirchoff, tenemos las ecuaciones 1, 2 y 3:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad \text{(ec. 1)}$$

$$\varepsilon - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 \qquad \text{(ec. 2)}$$

$$\varepsilon - I_1 R_1 - \frac{q}{C} = 0 \qquad \text{(ec. 3)}$$

De la ecuación 1, se expresa la corriente I_2 en función de las corrientes I_1 y I_3 y se reemplaza en la ecuación 2, así se obtiene la ecuación 4:

$$\varepsilon - I_1 R_1 - (I_1 - I_3) R_2 = 0$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon + R_2 I_3}{R_1 + R_2} \qquad \text{(ec. 4)}$$

La ecuación 4 en la ecuación 3:

$$\varepsilon - \left(\frac{\varepsilon + R_2 I_3}{R_1 + R_2}\right) R_1 - \frac{q}{C} = 0$$

Ademas, la corriente que pasa por el condesador en función de la carga :

$$I_3 = \frac{dq}{dt}$$

Entonces:

$$\varepsilon - \left(\frac{\varepsilon + R_2 I_3}{R_1 + R_2}\right) R_1 - \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{dq}{q-\frac{CR_2\varepsilon}{R_1+R_2}} = -\left(\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}\right)dt \qquad \text{(ec. 5)}$$

Integrando la ecuación 5:

$$\ln\left(q-\frac{CR_2\varepsilon}{R_1+R_2}\right)\Big|_0^Q = -\left(\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}\right)t\Big|_0^t$$

Evaluando entre los respectivos límites de integración:

$$Q(t) = \frac{CR_2\varepsilon}{R_1+R_2}\left[1-e^{-\frac{(R_1+R_2)t}{CR_1R_2}}\right] \qquad \text{(ec. 6)}$$

(b) La carga que almacena el condensador luego de un tiempo muy largo

En la ecuación 6, un tiempo muy largo: $t \to \infty$, entonces:

$$Q(t)_{max} = \lim_{t\to\infty}\frac{CR_2\varepsilon}{R_1+R_2}\left[1-e^{-\frac{(R_1+R_2)t}{CR_1R_2}}\right]$$

$$Q(t)_{max} = \frac{CR_2\varepsilon}{R_1+R_2}$$

(c) Determine la constante de tiempo en este circuito RC

La constante de tiempo τ:

$$\tau = \frac{CR_1R_2}{R_1+R_2}$$

(d) ¿Cuál es la corriente que pasa por el condensador

La corriente I_3 pasa por el condensador, entonces

$$I_3 = \frac{dq}{dt}$$

Luego:

$$I_3 = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{CR_2\varepsilon}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\frac{(R_1+R_2)t}{CR_1R_2}}\right)\right]$$

Derivando respecto de t, se tiene:

$$I_3 = \frac{\varepsilon}{R_1}e^{-\frac{(R_1+R_2)t}{CR_1R_2}}$$

(e) ¿Cuál es la corriente que pasa por la resistencia R_1?

Reemplazando en la ecuación 4, se tiene:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_2}{R_1}e^{-\frac{(R_1+R_2)t}{CR_1R_2}}\right)$$

(f) ¿Cuál es la corriente que pasa por la resistencia R_2?

Reemplazando en la ecuación 1, se tiene:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\frac{(R_1+R_2)t}{CR_1R_2}}\right)$$

Pregunta 2: (5 puntos)

Una superficie en forma de cinta muy larga y de ancho de longitud H, se ubica en el plano YZ, transportando corriente de intensidad I en la dirección +Z, como se muestra en la figura 2.

Si la corriente está distribuida uniformemente en todo el ancho, determine el campo magnético que produce esta corriente en un punto M de coordenadas (r; 0; 0).

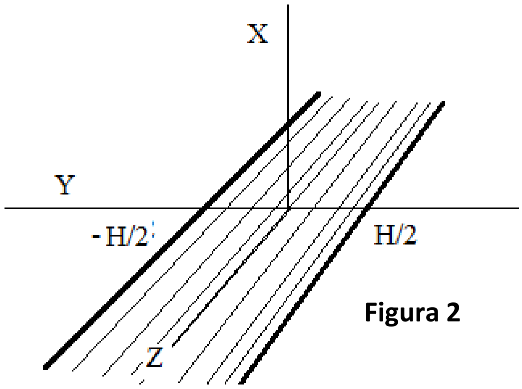
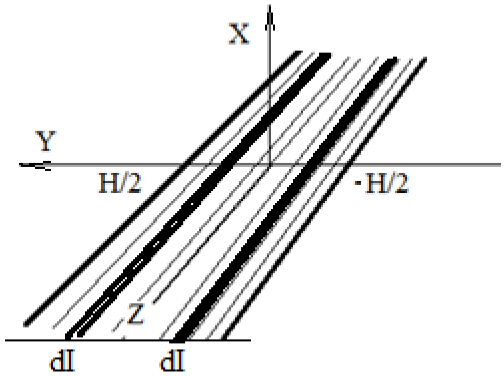


Figura 2

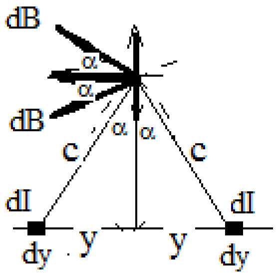
<u>Solución</u>

Tomando dos franjas paralelas de corriente dI en la cinta, vista (1) y luego pasamos a una vista defrente, vista (2), donde se ven los campos magnéticos de hilo recto muy largo:

(1)



(2)



Donde: $dB = \frac{\mu_o dI}{2\pi c}$. Luego por simetría descomponiendo estos campos nos queda la componente horizontal: $dB_{efec} = \frac{\mu_o dI}{2\pi c}$.cosα, lo cual integramos en la variable y, desde y= -H/2 hasta +H/2.

Resultado final: $$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi H} arctg\left(\frac{H}{2r}\right)\hat{j}$$

Pregunta 3: (5 puntos)

La figura 3 muestra un riel de alambre en forma de U, muy extenso y ubicado en un plano horizontal. Coplanar con el riel, se encuentra un alambre recto muy largo que conduce corriente I. Una barra conductora MN hace contacto liso con el riel y se desplaza con velocidad $\vec{v}$ constante. Si en el instante inicial (t = 0 s), la posición de la barra MN es $(a\hat{\imath})\ m$, siendo a >0. Halle:

(a) El flujo magnético en la región PQNM en función de la posición x (x<a),

(b) La fem inducida en función del tiempo t.

(c) La fuerza necesaria sobre la barra MN en el instante inicial t = 0 s, para iniciar este movimiento con velocidad v constante.

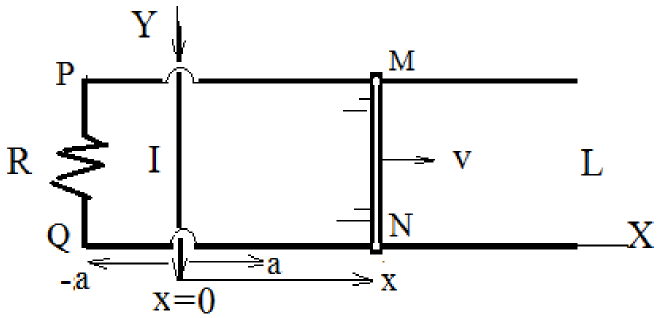
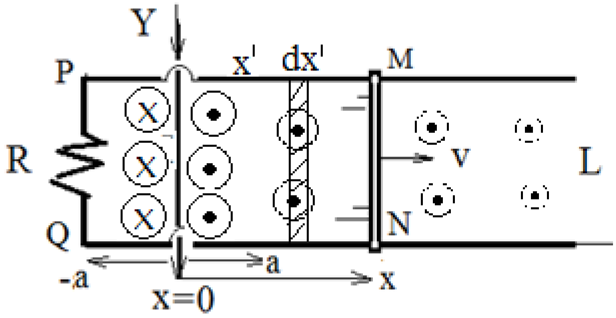


Figura 3

Solución

La figura muestra el corte de las líneas magnéticas que produce el hilo recto con corriente en el plano del riel. Observe que entre las posiciones x=–a y x=+a se anula el flujo magnético, ya que las líneas son opuestas. Luego el flujo neto dentro del “rectángulo” ocurre solo en la parte derecha del rectángulo, limitada por la barra MN.



a) Tomamos un “diferencial de flujo en la franja de espesor dx’ mostrada:

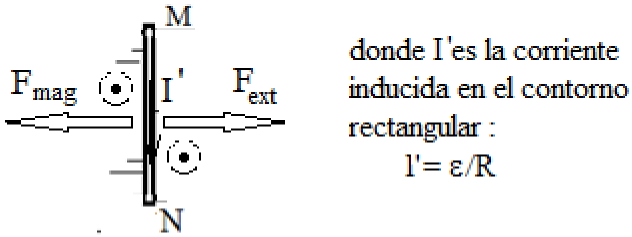
$$d\emptyset = BdA = \frac{\mu_o I}{2\pi x'} L dx'$$

Integrando entre x’= a y x’= x, resulta: $\emptyset(x) = \frac{\mu_o IL}{2\pi}(Ln(x) - Ln(a))$

b) Hallamos la fem inducida en el contorno rectangular derivando el flujo anterior respecto del tiempo, donde: x = a+vt , ya que la barra avanza con velocidad v= constante:

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mu_o ILv}{2\pi(a+vt)}$$

c) Para el movimiento de la barra se requiere elegir el sentido de la corriente inducida, según Lenz: sentido “horario” y en la barra la corriente va de M a N. Luego la fuerza externa que pueda vencer a la fuerza magnética, se muestra el DCL de la barra:



Como v= constante, la fuerza externa tiene igual valor de la fuerza magnética: F= $\frac{\mu_o^2 I^2 L^2 v}{4\pi^2 a^2 R}$

Pregunta 4: (5 puntos)

El circuito mostrado en la figura 4 está formado por una resistencia R, un inductor de inductancia L y un condensador de capacitancia C. Estos elementos están asociados en serie y conectados a una fuente de corriente alterna cuya amplitud de salida es 30.0 V y frecuencia de oscilación 32 Hz.

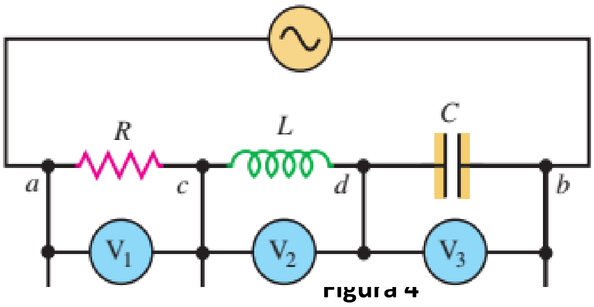


Figura 4

Si se sabe que el valor de la resistencia es 200 Ω, la inductancia es 0.400 H, la capacitancia del condensador 6.00 mF. Determine:

(a) La reactancia inductiva y la reactancia capacitiva

(b) La impedancia del circuito.

(c) EL voltaje rms de la fuente y la corriente rms en el circuito

(d) Los valores rms de los voltajes V_1, V_2 y V_3

(e) ¿Se cumple que la suma de los voltajes V_1, V_2 y V_3 es igual al valor máximo de la fuente alterna? Justifique su respuesta.

Solución

(a) La reactancia inductiva y la reactancia capacitiva

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 64\pi L = 64\pi * 0.400 = 80.4\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{64\pi * 6.0 * 10^{-3}} = 0.83\ \Omega$$

(b) La impedancia del circuito.

$$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$z = \sqrt{200^2 + (80.4 - 0.83)^2} = 215\ \Omega$$

(c) EL voltaje rms de la fuente y la corriente rms en el circuito

El voltaje de salida de la fuente de corriente alterna es de la forma:

$$V(t) = V_0 sen(\omega t) = V_0 sen(2\pi f t)$$

Entonces, el valor eficaz del voltaje o Vrms:

$$V_{rms} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}} = 21\ V$$

Así, la corriente eficaz:

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{21}{215} = 99\ mA$$

(d) Los valores rms de los voltajes V_1, V_2 y V_3

El voltaje V_1:

$$V_1 = I_{rms} R = 99x10^{-3} * 200 = 20V$$

El voltaje V_2:

$$V_2 = I_{rms}X_L = 99x10^{-3} * 80.4 = 7.9V$$

El voltaje V_3:

$$V_3 = I_{rms}X_C = 99x10^{-3} * 0.83 = 82\ mV$$

(e) ¿Se cumple que la suma de los voltajes V_1, V_2 y V_3 es igual al valor máximo de la fuente alterna? Justifique su respuesta.

De acuerdo a los resultados del ítem d, la suma de los voltajes V_1, V_2 y V_3 es 28.0 V y no es igual al valor máximo de la fuente alterna porque ella no tiene un valor constante, sino variable de acuerdo a la función. Además, el voltímetro,que miden los valores V_1, V_2 y V_3, mide valores eficaces.