UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA AMBIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS Y ESTUDIOS ESPECÍFICOS BÁSICOS

Curso	:	**MÉTODOS NUMÉRICOS**
Código del curso	:	MA-141
Ciclo	:	V
Sección	:	E
Docente	:	Héctor Alexis Herrera Vega
Fecha	:	10/05/19
Periodo Académico	:	2019-1

SOLUCIONARIO EXAMEN FINAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS

1. Dada la función $f(x) = 2^{2^x}$

a) Aproximar $f'(1)$ aplicando la fórmula centrada con $h = 0{,}001$ **(1.5 ptos)**

Resolución

- Identificando los valores: $x_o = 1$ y $h = 0.001$
- Reemplazamos en la fórmula centrada: $f'(x_o) \approx \dfrac{f(x_o+h) - f(x_o-h)}{2h}$

$$f'(1) \approx \frac{f(1+0.001) - f(1-0.001)}{2(0.001)} \quad \rightarrow \quad \boxed{f'(1) \approx 3.843628}$$

b) Aproximar $f''(1)$ aplicando la fórmula centrada con $h = 0{,}001$ **(1.5 ptos)**

Resolución

- Identificando los valores: $x_o = 1$ y $h = 0.001$
- Reemplazamos en la fórmula centrada: $f''(x_o) \approx \dfrac{f(x_o-h) - 2f(x_o) + f(x_o+h)}{h^2}$

$$f''(1) \approx \frac{f(1-0.001) - 2f(1) + f(1+0.001)}{0.001^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{f''(1) \approx 6.357561}$$

c) Mediante fórmulas, reglas o propiedades de derivación, halle $f'(x)$ y $f''(x)$; luego determine el VALOR EXACTO de $f'(1)$ y $f''(1)$ **(3 ptos)**

Resolución

- Hallamos $f'(x)$ aplicando la regla de la cadena:

$$Si \ \ f(x) = 2^{2^x} \ \rightarrow \ f'(x) = 2^{2^x}.ln2.(2^x)' \ \rightarrow \ f'(x) = 2^{2^x}.2^x.ln^2 2$$

- Luego, evaluamos en $x = 1$ y obtenemos: $\boxed{f'(1) = 8ln^2 2 = 3.843624 \ldots}$

- Hallamos $f''(x)$, para lo cual aplicamos la propiedad del producto y la regla de la cadena para derivar la función $f'(x)$

$$Si\ \ f'(x) = 2^{2^x}.2^x.ln^2 2 \ \ \rightarrow \ \ f''(x) = 2^{2^x}.2^x.ln^3 2.(1+2^x ln2)$$

- Luego, evaluamos en $x = 1$ y obtenemos:

$$\boxed{f''(1) = 8ln^3 2.(1+2ln2) = 6.357558\ldots}$$

2. Considere la siguiente integral: $I = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{x^4-1}dx$

a) Aplicando el método simple del TRAPECIO (cuando $n = 1$) y el método simple de SIMPSON (cuando $n = 2$) aproxime el valor de I. **(2 ptos)**

Resolución

- MÉTODO SIMPLE DEL TRAPECIO

  - ✓ En la integral, identificamos: $x_o = 0\,,\ \ x_1 = \dfrac{1}{2}$ y $f(x) = \dfrac{x}{x^4-1}$
  - ✓ Reemplazando en la fórmula: $\displaystyle\int_{x_o}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_o)+f(x_1)] \quad con \quad h = x_1 - x_o$

  Se obtiene: $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{x^4-1}dx \approx \frac{1/2-0}{2}[f(0)+f(1/2)] = \frac{1}{4}\left(0-\frac{8}{15}\right) = -\frac{2}{15}$

  Por lo tanto: $\boxed{\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{x^4-1}dx \approx -0.133333}$

- MÉTODO SIMPLE DE SIMPSON

  - ✓ En la integral, identificamos: $x_o = 0\,,\ \ x_1 = \dfrac{1}{4}\,,\ \ x_2 = \dfrac{1}{2}$ y $f(x) = \dfrac{x}{x^4-1}$
  - ✓ Reemplazando en la fórmula:

  $$\int_{x_o}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_o)+4f(x_1)+f(x_2)] \quad con \quad h = \frac{x_2 - x_o}{2}$$

  Se obtiene:

  $$\int_0^{1/2} \frac{x}{x^4-1}dx \approx \frac{1/2-0}{6}[f(0)+4f(1/4)+f(1/2)] = \frac{1}{12}\left[0+4\left(-\frac{64}{255}\right)-\frac{8}{15}\right]$$

  Por lo tanto: $\boxed{\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{x^4-1}dx \approx -0.128105}$

b) Con un método de integración analítica halle el valor exacto de I, y luego redondeando a 4 cifras decimales; calcule el error absoluto de cada aproximación anterior. **(4 ptos)**

Resolución

✎ MÉTODO ANALÍTICO

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{x^4-1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{2xdx}{\left(x^2\right)^2-1} = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{d\left(x^2\right)}{\left(x^2\right)^2-1} = \frac{1}{4}ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| \Big/_0^{1/2}$$

Por lo tanto: $\boxed{\int_0^{1/2} \frac{x}{x^4-1}dx = \frac{1}{4}ln\left(\frac{3}{5}\right) = -0.127706\ldots}$

✎ ERRORES ABSOLUTOS

Para el método del Trapecio: $\left|-0.1277-(-0.1333)\right| = 0.0056$

Para el método de Simpson : $\left|-0.1277-(-0.1281)\right| = 0.0004$

3. Al aproximar $\int_1^5 f(x)dx$ por el MÉTODO COMPUESTO DEL TRAPECIO con $n = 4$, se obtiene el valor de 9; y si dicha integral se aproxima mediante el MÉTODO COMPUESTO DE SIMPSON con $n = 4$, nos da un valor de 8. entonces ¿cuál es el valor de $\int_1^5 f(x)dx$ si se aproxima por el MÉTODO COMPUESTO DEL PUNTO MEDIO con $n = 2$? **(4 ptos)**

Resolución

✎ MÉTODO COMPUESTO DEL TRAPECIO ($n = 4$)

Por dato: $\int_1^5 f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left[f(1)+2f(2)+2f(3)+2f(4)+f(5)\right] = 9$, de donde:

$f(1)+2f(2)+2f(3)+2f(4)+f(5) = 18$ **… (*)**

✎ MÉTODO COMPUESTO DE SIMPSON ($n = 4$)

Por dato: $\int_1^5 f(x)dx \approx \frac{1}{3}\left[f(1)+4f(2)+2f(3)+4f(4)+f(5)\right] = 8$, de donde:

$f(1)+4f(2)+2f(3)+4f(4)+f(5) = 24$ **… (**)**

✍ MÉTODO COMPUESTO DEL PUNTO MEDIO ($n = 2$)

Nos piden: $\int_1^5 f(x)dx \approx 2\left[f\left(\frac{1+3}{2}\right) + f\left(\frac{3+5}{2}\right)\right] = 2\left[f(2) + f(4)\right]$ **... (***)**

Si a **(**)** le restamos **(*)** se obtiene: $f(2) + f(4) = 3$ que al remplazarlo en **(***)** nos queda:

$$\boxed{\int_1^5 f(x)dx \approx 6}$$

4. Se registra la velocidad de un avión durante un periodo de 1 hora. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos (en millas por hora) a intervalos de 5 minutos:

550	575	600	580	610	640	625	595	590	620	640	640	630

Aplicando el Método Compuesto de Simpson, estime la distancia recorrida por el avión en esa hora. **(4 ptos)**

Resolución

Como tenemos intervalos de 5 minutos, entonces:

$f(0)$	$f(5)$	$f(10)$	$f(15)$	$f(20)$	$f(25)$	$f(30)$	$f(35)$	$f(40)$	$f(45)$	$f(50)$	$f(55)$	$f(60)$
550	575	600	580	610	640	625	595	590	620	640	640	630

Luego, aplicando el MÉTODO COMPUESTO DE SIMPSON ($n = 12$) obtenemos:

$$\int_0^{60} f(t)dt \approx \frac{5}{3}\left[f(0) + 4f(5) + 2f(10) + \ldots + 4f(55) + f(60)\right] \times \frac{1 hora}{60 \min} \text{ reemplazando :}$$

$$\boxed{\int_0^{60} f(t)dt \approx 608.61\, millas}$$